

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
H. GEIGER

108. BAND. 9. UND 10. HEFT

MIT 54 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 27. MÄRZ 1938)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1938

Die

Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Auch verpflichtet sich der Autor, die Arbeit nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen.

Manuskriptsendungen sind an die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24, zu richten.

Die Autoren erhalten eine Fahnenkorrektur. Eine 2. (Umbruch-) Korrektur wird nur auf ausdrücklichen Wunsch übersandt, weil dadurch in der Regel das Erscheinen der Arbeit erheblich verzögert wird.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satz-kosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24.

Aufnahmebedingungen.

Nur solche Arbeiten können in die Zeitschrift für Physik aufgenommen werden, die den folgenden

Richtlinien

genügen:

1. Die Arbeit muß dem Gebiete der experimentellen oder theoretischen Physik angehören. Auch Arbeiten aus Nachbargebieten können aufgenommen werden. Ausgeschlossen sind jedoch Arbeiten mit rein mathematischem, astronomischem, mineralogischem oder chemischem Inhalt.
2. Die Einleitung der Arbeit soll den Leser in knappen Sätzen in die Vorgeschichte des Problems einführen. Je stärker ein Problem im Vordergrund des Interesses steht, desto kürzer kann die Einleitung gehalten werden.
3. Das Ziel der Arbeit muß schon in der Einleitung klar ausgesprochen werden. Es soll dabei auch ersichtlich sein, inwieweit die Erreichung des gesteckten Zieles einen im Rahmen der heutigen Physik wertvollen wissenschaftlichen Fortschritt bedeutet.
4. Die Beschreibung von Versuchsapparaten soll sich keinesfalls in technische Einzelheiten verlieren. Nur apparative Neuheiten von grundsätzlicher Bedeutung sind von Interesse. Die bildliche Wiedergabe von Apparaten soll durch schematische Zeichnung, nicht durch Photographie erfolgen.
5. Es ist fast immer ausreichend, von den Meßreihen ein typisches Beispiel herauszugreifen. An diesem Beispiel soll aber ersichtlich bzw. kontrollierbar sein, wie die Auswertung erfolgt ist, wie die Rechnungen durchgeführt wurden, welche Korrekturen angebracht sind usw.
6. Die Meßergebnisse sind *entweder* in Tabellen *oder* in Kurven wiederzugeben. Nur in Ausnahmefällen kann es gerechtfertigt sein, dasselbe Zahlenmaterial sowohl in Tabellen wie in Kurvenform zu veröffentlichen.
7. Die Lesbarkeit einer Arbeit gewinnt sehr, wenn die Figuren und Tabellen durch gut durchdachte Beschriftung an sich schon verständlich sind. Jedenfalls sollen alle Figuren und Tabellen mit Unterschriften bzw. Überschriften versehen sein.
8. In theoretischen Arbeiten sollen die mathematischen Ausführungen gerade so ausführlich veröffentlicht werden, daß der Leser die vom Verfasser überwundenen Schwierigkeiten nicht nochmals von neuem überwinden muß. Elementare Rechnungen dürfen nur ganz kurz angedeutet werden. In Zweifelsfällen empfiehlt es sich, Zwischenrechnungen als Anhang in kleinem Druck zu bringen.
9. Die Diskussion der Ergebnisse und die sonstigen allgemeinen Erörterungen sollen in ihrer Ausführlichkeit dem Umfang der in der Arbeit gewonnenen neuen Erkenntnisse entsprechen. Eine kurze Meßreihe berechtigt noch nicht dazu, einen großen Fragenkomplex lehrbuchartig aufzurollen.
10. Jede Arbeit muß in sich abgeschlossen sein. Arbeiten, welche allein auf einen Versuchsvorschlag oder nur auf eine Verbesserung von Meßverfahren oder Meßinstrumenten abzielen, können in der Regel nicht aufgenommen werden.
11. Dissertationen oder Habilitationsschriften können nicht in voller Breite aufgenommen werden. Nur solche Auszüge werden veröffentlicht, die den vorliegenden Richtlinien entsprechen. Die Auszüge sind in einer Fußnote als gekürzte Dissertation usw. zu kennzeichnen.
12. Am Kopf jeder Arbeit soll eine Inhaltsangabe in Kleindruck stehen. In diese Inhaltsangabe sollen vor allem die Punkte aufgenommen werden, welche der Verfasser als seine neuen Ergebnisse und damit als den durch seine Arbeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritt ansieht.

Der Herausgeber: H. Geiger.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie,
physikalisch-radioaktive Abteilung.)

Wirkungsquerschnitte bei Reaktionen zwischen sehr leichten Atomkernen¹⁾.

Von S. Flügge in Berlin-Dahlem.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Januar 1938.)

Es werden Stoßprobleme behandelt, an denen bis zu vier Elementarteilchen in zwei Atomkernen auftreten. Empirische Daten liegen zunächst vor über die elastische Streuung von Neutronen und Protonen an Deuteronen. Das Hauptproblem für die Durchführung der Rechnung ist die Wahl geeigneter approximativer Eigenfunktionen. Als Näherung wird angenommen, daß das Deuteron beim Auftreffen auf das Proton oder Neutron seine Gestalt beibehält (Vernachlässigung der „Polarisation“) und unter dieser Voraussetzung die im Sinne eines Hartree-Fock-Verfahrens „beste“ Eigenfunktion bestimmt, indem durch Integration über alle Koordinaten außer dem Abstände des Neutrons oder Protons vom Deuteronschwerpunkt das Problem auf einen einzigen Freiheitsgrad reduziert und die übrigbleibende Integrodifferentialgleichung für diesen Freiheitsgrad durch Reihenentwicklungen und numerische Methoden möglichst genau gelöst wird. Die erhaltenen Streuquerschnitte liegen um 10^{-24} cm² herum und fallen langsam mit wachsender Energie ab. Sie sind etwas kleiner als die experimentellen Zahlen. — Für die Streuung von Protonen von 830 kV an Deuteronen wird die Richtungsverteilung ausgerechnet und mit den Experimenten von Tuve, Heydenburg und Hafstad verglichen. — Für die $D + D$ -Reaktion als einfachster Kernumwandlung (mit vier Elementarteilchen) wurde mit Hilfe analog gebauter Eigenfunktionen die Übergangswahrscheinlichkeit aus einem $D + D$ -Anfangs- in einen $T + H$ -Endzustand ausgerechnet. Die Integrodifferentialgleichung für die Relativbewegung der beiden Deuteronenschwerpunkte im Anfangszustand bzw. die Bewegung des Protons zum Tritonschwerpunkt im Endzustand wurde wieder möglichst exakt gelöst. Dabei ergibt sich eine starke Verringerung der Amplitude für kleine Abstände, die, verbunden mit der Verkürzung der Wellenlänge, in diesem Gebiet dazu führt, daß die Wirkungsquerschnitte um einen Faktor 10^4 kleiner werden als in den bisher vorliegenden Rechnungen von Dolch. Man kommt damit in die Größenordnung der experimentellen Zahlenwerte von Ladenburg u. a. (einige 10^{-26} cm²). — Es werden ferner einige Auswahlregeln diskutiert, die es vielleicht verständlich machen, daß bei der $D + D$ -Reaktion charakteristische Abweichungen von der kugelsymmetrischen Verteilung der Trümmer beobachtet wurden.

1. Einleitung.

Die Kräfte, die zwischen den Elementarbausteinen des Atomkerns, den Protonen und Neutronen, wirken, sind uns heute in großen Zügen bekannt.

¹⁾ Vorgetragen in der Sitzung vom 10. November 1937 der Berliner Physikalischen Gesellschaft.

Der β -Zerfall hat uns gelehrt, daß sie mindestens zum Teil den Charakter von Austauschkräften¹⁾ haben müssen, d. h. daß sie eine Übergangswahrscheinlichkeit liefern müssen für die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und umgekehrt. Die Streuung langsamer Neutronen an Protonen lehrt uns, daß die Kräfte spinabhängige Anteile enthalten müssen; aus der Streuung von Protonen an Protonen endlich wissen wir, daß wenigstens bei antiparallelen Spins die Kräfte zwischen zwei gleichartigen Teilchen, abgesehen von der kleinen Coulombschen Abstoßung, quantitativ übereinstimmen mit denjenigen zwischen zwei verschiedenen Teilchen. Die Verallgemeinerung dieser Erfahrung zum „invarianten Kräfteansatz“ lag nahe, bei dem die Teilchen nicht mehr als zwei wesensverschiedene Arten angesehen werden, sondern als Teilchen ein und derselben Sorte, die sich lediglich durch eine zusätzliche Quantenzahl, die „Ladungsquantenzahl“ unterscheiden. Die Aussage, in welcher Weise die Kräfte dann außer vom Spin auch von der Ladung abhängen, ließ sich präzisieren durch eine Anwendung dieser Gedankengänge auf das Studium der Massendefekte schwerer Kerne, wie sie von Volz²⁾ und Kemmer³⁾ einerseits, von Euler⁴⁾ andererseits unlängst durchgeführt wurde. Die genannten Streuexperimente sowie unsere Kenntnis der Massendefekte und ungefähren Radien der Atomkerne gestatten ferner, anzugeben, wie stark die Kräfte sein müssen, um die richtigen Bindungsenergien, und wie weit sie reichen müssen, um die richtigen Kernradien zu ergeben. Diese Daten sind nun zwar mit erheblichen Unsicherheiten behaftet, da die Kernradien nur höchst ungenau definiert sind⁵⁾, und man

¹⁾ Das oft zugunsten der Austauschkräfte angeführte Argument, daß nämlich die Absättigung in der Bindungsenergie der schweren Kerne mit gewöhnlichen Kräften nicht zu verstehen sei, scheint mir für sich *allein* nicht überzeugend, da ja a priori eine starke Abstoßung zwischen zwei Teilchen bei Annäherung auf kleinere als die mittleren Abstände in den Atomkernen nicht auszuschließen ist und ebenfalls die Absättigung erklären könnte. Da wir andererseits aus der sicheren Quelle des β -Zerfalls wissen, daß Austauschkräfte vorliegen, würde die Annahme einer solchen kurzreichweitigen Abstoßung eine überflüssige Komplikation bedeuten. Doch ist bisher keineswegs bewiesen, daß sie nicht vielleicht doch da ist. Eine Entscheidung wird sich wohl erst dann treffen lassen, wenn wir einmal im Besitze einer konsequenten Theorie des β -Zerfalls sein werden. — ²⁾ H. Volz, ZS. f. Phys. **105**, 537, 1937. — ³⁾ N. Kemmer, Nature **146**, 192, 1937. — ⁴⁾ H. Euler, ZS. f. Phys. **105**, 553, 1937. — ⁵⁾ So ergibt eine von Bethe auf Grund des Bohrschen Mehrkörpermodells ausgeführte Überlegung um rund 50% höhere Kernradien für die schwersten Kerne (α -Strahler) als man auf Grund des Gamowschen Einkörpermodells früher annahm. Diese Betheschen Angaben sind jedoch umstritten; vgl. den Hinweis bei Heisenberg, Naturwiss. **25**, 749, 1937, sowie N. Bohr und F. Kalckar, Kgl. Danske Vidensk. Selskab, math. fysiske Medd. XIV, 10, 1937.

aus einer einzigen Zahl — eben der Bindungsenergie — nicht gut den ganzen Verlauf einer Funktion, etwa der Kraft als Funktion des Abstandes¹⁾ zweier wechselwirkender Teilchen, bestimmen kann.

Immerhin ist unsere Kenntnis des Kraftgesetzes aus den beschriebenen Methoden schon recht brauchbar. Wenn wir auch über einige Dinge noch keinen Aufschluß erhalten, z. B. die genaue Form der Ortsabhängigkeit, so hat das seine Ursache ja eben darin, daß es schwer ist, Experimente zu erdenken, auf die solche Feinheiten von Einfluß sind, so daß man sie aus ihnen ablesen könnte. Es hat daher guten Sinn, den Versuch zu unternehmen, auf Grund des gegenwärtig „besten“ Kraftgesetzes an die Durchrechnung spezieller Probleme der Kernphysik heranzugehen. Dabei zeigt sich, daß die mathematischen Schwierigkeiten sehr rasch mit wachsender Teilchenzahl zunehmen. So kommt es, daß eine befriedigende Theorie der Stoßvorgänge, an denen nur drei oder vier Elementarteilchen teilnehmen (z. B. der $D + D$ -Reaktion) noch nicht vorliegt. Es soll die Aufgabe dieser Arbeit sein, eine möglichst weitgehende theoretische Behandlung der in diesem Gebiet von den Experimentalphysikern studierten Erscheinungen zu geben²⁾.

2. Fragestellung. Abgrenzung der Methode.

Die kernphysikalischen Stoßvorgänge können ganz generell in zwei Gruppen eingeteilt werden:

Bei den *schwereren* Kernen verteilt sich die Energie des stoßenden Teilchens, sowie es auf die Oberfläche des Atomkernes auftrifft, auf alle Kernbausteine. Bohr³⁾ hat in seiner grundlegenden Arbeit gezeigt, daß auf diese Weise ein Zwischenzustand entsteht, bei dem das stoßende Teilchen in den Kern eingebaut ist (compound nucleus), der sich ohne „Rückerinnern“ an seine Entstehung weiter umwandeln kann nach Zeiträumen, die mindestens 10^6 mal größer sind als die Perioden der Bewegung von Teilchen im Kern.

¹⁾ Ein Experiment, das genaueren Aufschluß über die Reichweite der Kräfte geben kann, haben kürzlich Teller und Schwinger (Phys. Rev. **52**, 286, 1937) erdacht. Die bisher hierzu vorliegenden Messungen von Stern und Mitarbeitern (ebenda, S. 142) scheinen auf Reichweiten zu führen, die sicher nicht weit von denjenigen liegen, die wir, etwas willkürlich, benutzen.

— ²⁾ Auf die Massendefekte der Kerne mit 3 oder 4 Teilchen gehen wir in dieser Arbeit nicht näher ein. Sie sind oft von verschiedenen Autoren berechnet worden auf jeder Stufe unserer fortschreitenden Kenntnis der Kräfte. Mit dem vorliegenden Kraftansatz wurden sie behandelt in einer Arbeit des Verfassers, an die im folgenden in Symbolik und Methode mehrfach angeknüpft werden wird (ZS. f. Phys. **105**, 522, 1937). — ³⁾ N. Bohr, Nature **137**, 344, 1936; Naturwiss. **24**, 241, 1936.

Im mathematischen Formalismus kann dieser aus den Experimenten gefolgerte Sachverhalt nichts anderes bedeuten, als daß die Wahrscheinlichkeit für direkte Übergänge aus dem Anfangs- in den Endzustand des Systems sicher nicht die Wahrscheinlichkeit für Übergänge zweiter Ordnung überwiegt, bei denen der Weg über einen langlebigen Zwischenzustand eingeschlagen wird. Die nähere Diskussion hat gezeigt, daß dies Verhalten daher rührt, daß die möglichen quasistationären Zustände bei einigermaßen schweren Kernen und nicht allzu kleinen Energien schon sehr dicht liegen, so daß eine ausgesprochene Resonanzerscheinung fast immer auftritt. Es hat den Anschein, als ob diese Resonanzeindringung in den Kern schon bei ziemlich leichten Kernen (der Masse 10) überwiegt¹⁾.

Geht man dagegen zu den *allerleichtesten* Kernen über, so kann es nur zu einer Verteilung der Energie des auffallenden Stoßpartners auf sehr wenige Teilchen kommen. Die Resonanzniveaus liegen dann so weit auseinander, daß es sehr unwahrscheinlich wird, in eines davon hineinzugeraten, und sie werden so verwaschen, daß die Lebensdauer des Zwischenzustandes, wenn er überhaupt zustande kommt, vergleichbar wird mit den Kernperioden. Hier werden also die direkten Übergänge aus dem Anfangs- in den Endzustand überwiegen.

Wir können diese Erscheinungen am Beispiel der elastischen Streuung sehr anschaulich auch so ausdrücken: Durchläuft das stoßende Teilchen den Kern, um ihn sofort wieder zu verlassen, so besteht eine scharfe Beziehung zwischen den Phasen der einfallenden und der auslaufenden Welle. Auf dem Vorhandensein einer derartigen Beziehung beruht ja das aus der optischen Beugungstheorie herübergenommene Verfahren zur Berechnung einer derartigen Streuerscheinung, wie es von Holtsmark, Mott²⁾ u. a. begründet worden ist. Es liegt also ein ausgesprochen *kohärenter* Streuvorgang vor. Ganz anders, wenn das stoßende Teilchen lange Zeit im Kern verweilt: Die zahlreichen Zufälligkeiten der Zusammenstöße mit den anderen Kernbausteinen werden dann entscheidenden Einfluß darauf haben, mit welcher Phase es den Kern wieder verläßt. Jede „Rückerinnerung“ an den Anfangszustand wird dann ausgelöscht sein; wir können von *inkohärenter* Streuung sprechen. Physikalisch sind natürlich alle Übergänge zwischen diesen beiden wohldefinierten Grenzfällen möglich; der Rechnung zugänglich scheint im Augenblick nur der eine oder andere Grenzfall selbst. Überwiegt die

¹⁾ Wenigstens scheint dies aus Beobachtungen zu folgen, die Bothe auf dem Physikertag in Bad Kreuznach, Sept. 1937, referiert hat. Vgl. E. Wilhelmy, *Naturwiss.* **25**, 173, 1937; *ZS. f. Phys.* **107**, 769, 1937. — ²⁾ Vgl. etwa N. F. Mott u. H. S. W. Massey, *Atomic Collisions* (Oxford 1933).

inkohärente Streuung, was bei schwereren Kernen sehr bald eintritt, so muß die Rechnung an die von Bohr entwickelten Gedankengänge anknüpfen, überwiegt dagegen die kohärente, wie es bei den uns hier interessierenden leichtesten Kernen zutreffen dürfte, so ist eine einfachere Form der Darstellung angemessen.

Es erscheint danach aussichtsreich, für diese einfachsten Prozesse die direkten, kohärenten Übergänge auszurechnen und mit der Erfahrung zu vergleichen. Die so erhaltenen Wirkungsquerschnitte dürften eher *zu klein* (nämlich um die inkohärenten Glieder) als zu groß ausfallen. Ein Versuch zu einer derartigen Rechnung wurde bisher nur einmal von Dolch¹⁾ unternommen für die einfachste denkbare Reaktion im eigentlichen Sinne:



Seine Rechnungen ergaben bei einer Energie des stoßenden Deuterons von 100 kV Wirkungsquerschnitte der Größenordnung 10^{-22} cm^2 , was um rund 4 Zehnerpotenzen *größer* ist als die zur Zeit besten verfügbaren experimentellen Angaben von Ladenburg. Es wurde bereits vermutet, daß die Ursache dieses Versagens der Theorie in der Wahl der Eigenfunktionen zu suchen sei, doch schien es zunächst aussichtslos, eine namhafte Verbesserung herbeizuführen. Es wird einer der Hauptpunkte dieser Arbeit sein, diese Diskrepanz aufzuklären und durch konsequente Verbesserung der Eigenfunktionen zu beseitigen. Das Verfahren soll zunächst an Hand des einfacheren Dreikörperproblems erläutert werden, wo wir es nur mit elastischer Streuung zu tun haben. Es wird uns möglich sein, für die Streu- und Umwandlungsquerschnitte beim Drei- und Vierkörperproblem mit den Experimenten vergleichbare Angaben zu machen und auch zu einigen Aussagen über Richtungsverteilungen nach dem Stoß zu kommen.

3. Erläuterung des Verfahrens am Dreikörperproblem.

Für das Dreikörperproblem liegen empirische Daten vor über den Zusammenstoß eines Neutrons oder Protons mit einem Deuteron. Dabei sind folgende Prozesse denkbar:

1. *Einfangung* des stoßenden Teilchens, also entweder Anlagerung, d. h. Bildung eines ${}^3\text{H}$ oder ${}^3\text{He}$ unter Emission eines harten γ -Quants, oder Reemission (inkohärente Streuung). Es wurde bereits in Abschnitt 2 gezeigt, daß solche Prozesse sicher nicht sehr wahrscheinlich sind. Der mit γ -Strahlung verbundene Prozeß ist deshalb unwahrscheinlich, weil die

¹⁾ H. Dolch, ZS. f. Phys. **100**, 401, 1936.

Strahlungskräfte sehr klein sind gegen die Kernkräfte, also letzten Endes wegen der Kleinheit von $e^2/\hbar c$.

2. *Zertrümmerung* des Deuterons, so daß nach dem Stoß drei freie Teilchen entstehen. Dieser Prozeß kann erst oberhalb von etwa 3 MV Energie des stoßenden Teilchens einsetzen, da dies, um dem Impulssatz zu genügen, höchstens $2/3$ seiner Energie zur Anregung des Deuterons abgeben kann und diese $2/3$ mindestens den Massendefekt von 2 MV aufwiegen müssen.

3. *Kohärente elastische Streuung*. Dieser Prozeß dürfte unterhalb 3 MV der überwiegend wahrscheinliche sein. Über ihn allein liegt experimentelles Material vor, weshalb er hier eingehender betrachtet werden soll.

Wir legen für die *Kräfte* den folgenden Ansatz zugrunde: Die Rolle der potentiellen Energie zwischen zwei Teilchen 1 und 2 in der Schrödinger-Gleichung soll der folgende Operator übernehmen:

$$-M_{12} \Sigma_{12} P_{12} - H_{12} P_{12} + B_{12} \Sigma_{12} + W_{12}, \quad (1)$$

wobei Σ_{12} ein Operator ist, der die Spins der Teilchen 1 und 2 vertauscht, und P_{12} ein analog gebildeter die Ladungen vertauschender Operator¹⁾. Die Größen M_{12} , H_{12} , B_{12} , W_{12} sind gewöhnliche Potentialfunktionen des Abstandes r_{12} der beiden wechselwirkenden Teilchen voneinander. Wir setzen $M_{12} = m \cdot V_{12}$, $H_{12} = \hbar \cdot V_{12}$, $B_{12} = b \cdot V_{12}$ und $W_{12} = w \cdot V_{12}$ und

$$V_{12} = M_{12} + B_{12} + H_{12} + W_{12} = -A e^{-b^2 r_{12}^2}. \quad (2)$$

Dabei legen wir für die Koeffizienten m , \hbar , b und w die besten zur Zeit verfügbaren Werte zugrunde, nämlich die auf Grund einer Bemerkung von Kemmer korrigierten Angaben von Volz²⁾:

$$m = +10/12, \quad \hbar = -2/12, \quad b = +5/12, \quad w = -1/12, \quad (3)$$

welche die beobachteten Sättigungserscheinungen in den Massendefekten der schweren Atomkerne am besten wiedergeben.

Bezeichnen wir nun wieder wie l. c. mit σ eine Spinfunktion und mit ϱ eine Ladungsfunktion, so muß die Gesamteigenfunktion eines Systems aus einem Deuteron und einem dritten Teilchen (Neutron oder Proton) die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \Psi = & \varrho(\bar{1} \bar{2}, 3) \sigma(\bar{1} \bar{2}, 3) \varrho(\bar{1} \bar{2}, 3) + \varrho(\bar{2} \bar{3}, 1) \sigma(\bar{2} \bar{3}, 1) \varrho(\bar{2} \bar{3}, 1) \\ & + \varrho(\bar{3} \bar{1}, 2) \sigma(\bar{3} \bar{1}, 2) \varrho(\bar{3} \bar{1}, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾ Die hier zur Anwendung kommende Schreibweise ist die gleiche wie in der Arbeit des Verfassers, ZS. f. Phys. **105**, 522, 1937, die dort eingehend erläutert ist. — ²⁾ In einer nach Abschluß der Rechnungen erschienenen Arbeit von Heisenberg (Naturwiss. **25**, 749, 1937) werden diese Koeffizienten ebenfalls als die wahrscheinlich besten angesehen.

Diese Eigenfunktion genügt zunächst dem Pauli-Prinzip in seiner erweiterten Form¹⁾, da sie antisymmetrisch ist in allen drei Teilchen. Der erste Summand allein besagt: 1 und 2 sind die beiden im Deuteron gebundenen, 3 das freie Teilchen. Die Ortsfunktion q ist in 1 und 2 symmetrisch, wie es für den ¹³S-Grundzustand des Deuterons sein muß; ihre Spins sind parallel und die Ladungseigenfunktion ist antisymmetrisch. Es möge der Spin des Deuterons in die z -Richtung fallen, dann kann sich der Spin des freien Teilchens parallel (Quartettzustand mit dem Spin $3/2$ und dem Gewicht $2/3$) oder antiparallel (Dublettzustand mit dem Spin $1/2$ und dem Gewicht $1/3$) dazu einstellen. Wir machen demgemäß folgende Ansätze für Spin- und Ladungsfunktion:

$$\sigma(\overline{12}, 3) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (\text{Quartett}), \quad | \quad (5)$$

$$\sigma(\overline{12}, 3) = \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \quad (\text{Dublett}), \quad |$$

$$q(\overline{12}, 3) = (a_1 b_3 - a_2 b_1) a_3 \quad (\text{in beiden Fällen}). \quad (6)$$

Wir denken uns die so beschriebene Ψ -Funktion eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung im Konfigurationsraum aller drei Teilchen, wobei jedes drei Orts-, eine Spin- und eine Ladungskordinate hat. Dabei führen wir als Potential drei Ausdrücke der Form (1) mit den Argumenten 1, 2 und 1, 3 und 2, 3 ein. Wir können dann zunächst den Operator $\sum_q q(\overline{12}, 3)$ auf diese Gleichung anwenden, d. h. über alle möglichen Einstellungen des Ladungsvektors summieren, was noch keinen Unterschied gibt zwischen Quartett- und Dublettfall. Sodann üben wir die Operation $\sum_\sigma \sigma(\overline{12}, 3)$ aus, d. h. wir summieren über alle möglichen Einstellungen des Spins. Dabei erhalten wir, wenn wir mit T den Operator der kinetischen Energie bezeichnen, folgende Gleichungen:

Im Dublettfall:

$$\begin{aligned} T q(\overline{12}, 3) + (M_{12} + H_{12} + W_{12} + B_{12}) q(\overline{12}, 3) \\ + (W_{13} - \tfrac{1}{2} H_{13}) q(\overline{12}, 3) + (W_{23} - \tfrac{1}{2} H_{23}) q(\overline{12}, 3) \\ + (M_{13} - \tfrac{1}{2} B_{13}) q(\overline{23}, 1) + (M_{23} - \tfrac{1}{2} B_{23}) q(\overline{13}, 2) \\ = E \cdot q(\overline{12}, 3); \quad (7) \end{aligned}$$

im Quartettfall:

$$\begin{aligned} T \psi(\overline{12}, 3) + (M_{12} + H_{12} + W_{12} + B_{12}) \psi(\overline{12}, 3) \\ + (W_{13} + B_{13}) \psi(\overline{12}, 3) + (W_{23} + B_{23}) \psi(\overline{12}, 3) \\ + (M_{13} + H_{13}) \psi(\overline{23}, 1) + (M_{23} + H_{23}) \psi(\overline{13}, 2) \\ = E \cdot \psi(\overline{12}, 3). \quad (8) \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. z. B. F. Hund, ZS. f. Phys. **105**, 202, 1937.

Darin bedeutet ψ die Linearkombination

$$\psi(\overline{12}, 3) = 2 \cdot \varphi(\overline{12}, 3) - \varphi(\overline{23}, 1) - \varphi(\overline{13}, 2). \quad (9)$$

Setzt man hier die Volz-Kemmerschen Koeffizienten nach Gleichung (3) ein, so entsteht für den Dublettfall:

$$T \varphi(\overline{12}, 3) + V_{12} \varphi(\overline{12}, 3) + \frac{5}{8} V_{13} \varphi(\overline{23}, 1) + \frac{5}{8} V_{23} \varphi(\overline{13}, 2) = E \varphi(\overline{12}, 3) \quad (10)$$

und für den Quartettfall:

$$T \psi(\overline{12}, 3) + V_{12} \psi(\overline{12}, 3) + \frac{1}{3} V_{13} \psi(\overline{12}, 3) + \frac{1}{3} V_{23} \psi(\overline{12}, 3) + \frac{3}{4} V_{13} \psi(\overline{23}, 1) + \frac{3}{4} V_{23} \psi(\overline{13}, 2) = E \psi(\overline{12}, 3). \quad (11)$$

Es fällt auf, daß die in Gleichung (11) auftretenden Kräfte eine viel stärkere Anziehung bedeuten als die in (10). Danach könnte man bei flüchtiger Betrachtung den Eindruck gewinnen, als ob dies Verfahren bei der Anwendung auf gebundene Zustände, also bei der Berechnung des Massendefektes des Tritons, zu der Aussage führte, daß der Zustand mit dem Kernspin $3/2$ Grundzustand und derjenige mit dem Spin $1/2$ ein angeregter Zustand des Tritons sei. Daß dies nicht der Fall ist, folgt aus Gleichung (9): Für die tiefe Lage eines Zustandes ist ja außer der Intensität der anziehenden Kräfte die Ortsabhängigkeit der Eigenfunktion von entscheidender Bedeutung. In der Theorie der Atomhülle spielt letztere sogar fast ausschließlich eine Rolle zur Bestimmung der Reihenfolge der Niveaus. Dabei ist ein Zustand um so tiefer, je weniger Knotenlinien er hat. Der tiefste Zustand des Tritons wird also derjenige sein, bei dem φ oder ψ möglichst nahe kugelsymmetrisch ist. Aus (9) folgt aber, daß im Falle der Kugelsymmetrie ψ verschwindet: Der tiefste Zustand im Quartettsystem, der aus Gleichung (11) berechnet werden kann, ist durch das Pauli-Prinzip verboten. Dasselbe folgt natürlich noch anschaulicher für den speziellen Ansatz des Heisenbergschen Oszillatormodells¹⁾, wo die Analogie zum He-Spektrum der Elektronenhülle unmittelbar evident ist.

Die Gleichungen (10) und (11), die die Unterlage bilden müssen für die Berechnung des Ortsanteils der Eigenfunktion, unterscheiden sich in charakteristischer Weise von einer normalen Schrödinger-Gleichung durch die beiden letzten Glieder der linken Seite, in denen die Eigenfunktion mit vertauschten Argumenten eingeht. Derartige Ausdrücke treten immer auf, wenn irgendwelche Austauscherscheinungen berücksichtigt werden müssen; also entweder wenn Austauschkräfte vorhanden sind, oder aber, wenn durch die Antimetrisierung der Eigenfunktion der Vertauschbarkeit gleicher

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **96**, 473, 1935.

Teilchen Rechnung getragen wird. Bei uns kommt beides zusammen; in der Theorie der Elektronenhülle tritt immer nur die zweite Erscheinung auf. Es ist dort zuerst von Fock¹⁾ gezeigt worden, in welcher Weise man dann die Hartree-Näherung zu erweitern hat, um derartigen Gliedern Rechnung zu tragen. In ähnlicher Weise werden wir hier verfahren.

Der *entscheidende Schritt* zur Lösung der Gleichungen (10) und (11) ist der folgende Ansatz: Sind bei einem Stoßvorgang Deuteron und stoßendes Teilchen räumlich noch weit voneinander getrennt, so muß $\varphi(\bar{1}2, 3)$ offenbar in drei Faktoren zerlegt werden können:

$$\varphi(\bar{1}2, 3) = g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) f\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \mathbf{r}_3\right) e^{i\mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}}, \quad (12)$$

wobei g die gewöhnliche Eigenfunktion für die Relativbewegung der beiden im Deuteron gebundenen Teilchen ist, die exakt aus der Lösung eines Zweikörperproblems erhalten werden kann, und für die wir, wie zuerst Wigner²⁾ gezeigt hat, genähert

$$g(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} \quad (13)$$

setzen können. Die Funktion f beschreibt die Relativbewegung der beiden Schwerpunkte der stoßenden Teilchen zueinander; sie geht also asymptotisch in eine ebene Welle über, die überlagert ist von einer auslaufenden Kugelwelle. Endlich bedeutet der dritte, unwesentliche Faktor, daß der Schwerpunkt des Gesamtsystems aus beiden Stoßpartnern sich noch im Raume bewegen kann. Wählen wir als Koordinatensystem dasjenige, in dem der Gesamtschwerpunkt ruht, so wird $\mathbf{r}_0 = 0$, und dieser Faktor entfällt. Diese Vereinfachung soll im folgenden stets stillschweigend gemacht werden.

Unsere Näherung besteht nun darin, daß wir postulieren, der Ansatz (12) solle auch dann noch Sinn haben, wenn die beiden Teilchen zusammenstoßen. Physikalisch gesprochen heißt das, wir berücksichtigen nur den Einfluß des Deuterons auf die Bahn des stoßenden Teilchens; wir vernachlässigen dagegen dessen Rückwirkung auf die innere Bewegung des Deuterons, also die Verzerrung oder „Polarisation“, die dies durch das aufschlagende Teilchen erfährt. Es ist schwer abzuschätzen, wie groß der Fehler ist, der von dieser Vernachlässigung herrührt; er wird sicher klein, solange die kinetische Energie des aufschlagenden Teilchens klein ist gegen die Bindungsenergie von 2 MV des Deuterons. Welchen Einfluß er hat, wenn beide Energien miteinander vergleichbar werden, und insbesondere,

¹⁾ V. Fock, ZS. f. Phys. **61**, 126, 1930. — ²⁾ E. Wigner, Phys. Rev. **43**, 252, 1933.

ob er dann die Größenordnung der Resultate beeinflußt, kann nur die Durchführung der Rechnung und der Vergleich mit den Experimenten lehren.

Das Ziel unserer weiteren Rechnung wird also sein, die Funktion f zu bestimmen.

Dazu schlagen wir den konsequenten, durch die Methode von Hartree-Fock vorgezeichneten Weg ein. Die Rechnung auf Grund des Ansatzes (12) unterscheidet sich nun freilich in einem Punkte vom üblichen Hartree-Verfahren: Während man dort die unabhängige Bewegung der *Teilchen* voneinander postuliert und die Eigenfunktion in ein Produkt zerlegt, deren Faktoren jeweils nur von einer einzigen Teilchenkoordinate abhängen, spielen hier die Rolle der Teilchenkoordinaten drei etwas komplizierter gebaute *Freiheitsgrade* des Gesamtsystems, nämlich die Kombinationen:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \quad (14a)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (14b)$$

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{3} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{r}_3, \quad (14c)$$

also: Der Abstand der beiden Schwerpunkte voneinander, der Abstand der beiden das Deuteron bildenden Teilchen voneinander und die Schwerpunktskoordinate des Gesamtsystems.

Wir wenden uns nun der Behandlung von Gleichung (7) für den Dublett-fall zu, indem wir von den Koordinaten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ auf die durch (14) definierten neuen Koordinaten $\mathfrak{R}, \mathbf{r}, \mathfrak{s}$ umrechnen. Für die Gleichung (7) des Quartett-falles würde die Rechnung völlig analog verlaufen. Gleichung (7) geht über in:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} + 2 \Delta_{\mathbf{r}} \right) - E + V(\mathbf{r}) + \frac{e^2}{r_{13}} \right. \\ & \quad + \left(\mathfrak{w} - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \right) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) + V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] \Big\} g(\mathbf{r}) f(\mathfrak{R}) \\ & \quad + \left(\mathfrak{m} - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \right) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} \mathbf{r}\right) \right. \\ & \quad \left. + V\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3}{4} \mathbf{r}\right) \right] = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch das Coulomb-Glied e^2/r_{13} hinzugefügt, das nur im Falle eines stoßenden Protons auftritt und für ein stoßendes Neutron wegfällt.

Auf Gleichung (15) wenden wir die Operation an $\int d\mathbf{r} d\mathfrak{s} g(\mathbf{r}) \dots$. Dann lassen sich die beiden Glieder

$$\int g(\mathbf{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{M} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) \right\} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E_D = -2,3 \text{ TME} \quad (16)$$

zusammenfassen; sie geben gerade den Massendefekt des Deuterons. Es tritt in der Gleichung also nur noch die Differenz

$$E_D - E = -E' \quad (17)$$

auf. E' ist die kinetische Energie der Relativbewegung der beiden Stoßpartner zueinander. Mit diesen Abkürzungen entsteht

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{h^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E' + \left(w - \frac{1}{2} b \right) \int g^2(r) \left[V\left(\mathfrak{R} + \frac{r}{2}\right) + V\left(\mathfrak{R} - \frac{r}{2}\right) \right] dr \right. \\ & \quad \left. + \int g^2(r) \frac{e^2}{r_{13}} dr \right\} f(\mathfrak{R}) \\ & + \left(m - \frac{1}{2} b \right) \left\{ \int g(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{r}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{r}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} r\right) dr \right. \\ & \quad \left. + \int g(r) V\left(\mathfrak{R} - \frac{r}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} + \frac{r}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{3}{4} r\right) dr \right\} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

In dieser Gleichung hängen die Funktionen V und g nur von den Beträgen ihrer Argumente ab. Infolgedessen kann man, wie man leicht überlegt, die Integrale paarweise zusammenziehen und erhält

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{h^2}{2M} \cdot \frac{3}{2} \Delta_{\mathfrak{R}} - E' + (2w - b) \int g^2(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{r}{2}\right) dr \right. \\ & \quad \left. + \int g^2(r) \frac{e^2}{r_{13}} dr \right\} f(\mathfrak{R}) \\ & + (2m - b) \int g(r) V\left(\mathfrak{R} + \frac{r}{2}\right) g\left(\mathfrak{R} - \frac{r}{2}\right) f\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2} - \frac{3}{4} r\right) dr = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Für die weitere Behandlung von (19) erinnern wir uns an die übliche Methode, Streuvorgänge nach der Wellenmechanik zu berechnen. Die asymptotische Form der Lösung für große R muß im Coulombfeldfreien Falle des Neutrons sein:

$$f(\mathfrak{R}) = \rightarrow e^{ikZ} + \frac{e^{ikR}}{2ikR} \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \Theta), \quad (20a)$$

wobei $Z = R \cos \Theta$ ist und der Zusammenstoß der Teilchen längs der Z -Achse erfolgt. Im Falle des Protons tritt an Stelle von (20a):

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{R}) = & \rightarrow e^{ikZ + i\alpha_0 \ln \left(2kR \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)} \\ & - \frac{\alpha_0}{2kR \sin^3 \frac{\Theta}{2}} e^{i \left(kR - \alpha_0 \ln 2kR - \frac{l\pi}{2} + 2\eta_l \right)} \\ & + \frac{e^{i(kR - \alpha_0 \ln 2kR)}}{2ikR} \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) e^{2i\eta_l} P_l(\cos \Theta), \end{aligned} \quad (20b)$$

wobei $\alpha_0 = e^2/\hbar v$ und $\eta_l = \arg(l + i\alpha_0)!$ ist. In diesen beiden Formeln bedeuten jeweils die nicht entwickelten Glieder die Eigenfunktion in einem Felde ohne Kernkräfte. In (20a) sind dann überhaupt keine Kräfte vorhanden, und es tritt nur eine ungestörte ebene Welle auf; in (20b) ist die einzige Störung das Coulomb-Feld, das zu einer logarithmisch mit der Entfernung wachsenden Phasenverschiebung und Änderung der Wellenlänge in der ebenen Welle führt und daneben eine zusätzliche Streuwelle auftreten läßt, die in ihrer Abhängigkeit von Θ das Rutherford'sche Streugesetz befolgt. Der Einfluß weiterer vorhandener Kräfte, die schneller abklingen als $1/r$, äußert sich in den hinzutretenden Gliedern, die in Form von Kugelfunktionsreihen geschrieben sind. Die δ_l sind hierin die Phasenverschiebungen, die die einzelnen Partialwellen durch die Kernkräfte erfahren. Man gewinnt sie, indem man $f(\mathfrak{R})$ nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} \sum_l c_l f_l(R) P_l(\cos \Theta), \quad (21)$$

und die so für jedes l aus (19) entstehende Gleichung löst, die nur noch die eine Koordinate R enthält. Schreibt man ihre asymptotische Lösung für große R in der Form

$$f_l(R) = \sin\left(kR - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right) \quad (22a)$$

für den Neutronenstoß, und

$$f_l(R) = \sin\left(kR - l\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \ln 2kR + \eta_l + \delta_l\right) \quad (22b)$$

für den Protonenstoß, so sind dadurch die Phasen δ_l bestimmt. Kennt man diese Phasen, so kann man sofort aus bekannten Formeln der wellenmechanischen Beugungstheorie die Wirkungsquerschnitte usw. berechnen.

Wir können in unserem Falle noch eine wesentliche Vereinfachung der Theorie vornehmen. Aus der Wellenkinematik solcher Beugungsvorgänge folgt nämlich der allgemeine Satz, daß die Entwicklung nach Kugelfunktionen um so schneller konvergiert, je größer die Wellenlänge λ der gebeugten Welle gegenüber dem Radius r_0 des beugenden Hindernisses ist. Nun ist $\lambda \sim E'^{-1/2}$, so daß wir uns für kleine Energien mit dem ersten, kugelsymmetrischen Gliede der Entwicklung begnügen dürfen. Eine Abschätzung zeigt sofort, daß in diesem Sinne „klein“ noch Energien von 2 bis 3 MV des stoßenden Teilchens sind. Da sich die Messungen im wesentlichen auf diesen Bereich beschränken, genügt es also, im folgenden die Voraussetzung der Kugelsymmetrie einzuführen.

Damit entfällt von vornherein der Beitrag des Quartettzustandes zur Streuung. Wir sahen ja bereits, daß in diesem Falle die Eigenfunktion einen Knoten haben muß, da sie in Spin und Ladung der beiden gleichartigen Teilchen **symmetrisch** ist, also zur Erfüllung des Pauli-Prinzips in ihren Örtern **antimetrisch** sein muß. Das ist aber unvereinbar mit der Voraussetzung der Kugelsymmetrie.

4. Lösung von Gleichung (19) für den kugelsymmetrischen Fall.

Die nächste Aufgabe wird es sein, unter Benutzung der speziellen Ansätze Gleichung (13) für die Funktion g und Gleichung (2) für die Potentialfunktion V die in Gleichung (19) vorkommenden Integrale mit einer kugelsymmetrischen Funktion

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} f_0(R) \quad (23)$$

auszuführen. Das in der ersten Zeile von (19) stehende gewöhnliche Potentialglied bietet dabei keine Schwierigkeiten, da im Integranden nur Funktionen vom Typus der Gaußschen Fehlerfunktion auftreten. Etwas schwieriger ist die Ausführung des Coulomb-Gliedes, wo man zu anderen Koordinaten übergehen muß, unter denen \mathbf{r}_{13} vorkommt. In diesem Falle sind nicht alle Integrationen elementar ausführbar, und es bleibt am Ende ein Fehlerintegral stehen. Einige Schwierigkeiten bieten auch die in der dritten Zeile stehenden Austauschglieder. Hier empfiehlt sich die Umrechnung von den Koordinaten \mathbf{r}, \mathfrak{R} auf

$$\mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \mathfrak{R} - \frac{3}{4} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}. \quad (24)$$

Die Integration über alle Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{r}' und \mathfrak{R} ist dann elementar möglich, dagegen bleibt natürlich ein Integral über r' stehen, unter dem die Funktion $f(r')$ auftritt. Die Gleichung (19) geht nach Ausführung dieser Rechnungen über in

$$\begin{aligned} & -\frac{3h^2}{4M} \frac{d^2 f_0}{dR^2} - E' f_0(R) - (2w - b) A \left(1 + \frac{b^2}{8\alpha}\right)^{-3/2} e^{-\frac{1}{2} R^2} f_0(R) \\ & + \frac{e^2}{R} \Phi(2\sqrt{2\alpha} R) f_0(R) \\ & - \left(\frac{4}{3}\right)^3 A (2m - b) \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{2\pi}{2\mu} \int_0^\infty dr' f_0(r') e^{-\lambda(r'^2 + R^2)} (e^{2u r' R} - e^{-2u r' R}) \\ & = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Der Faktor $(\frac{4}{3})^3$ im letzten Gliede rührt dabei her von der Funktionaldeterminante der Transformation (24); die Faktoren 2π und $1/2\mu$ von den Integrationen über die Winkel. Die Abkürzungen bedeuten:

$$\lambda = \frac{4}{9} \cdot (5\alpha + b^2), \quad \mu = \frac{4}{9} (4\alpha - b^2), \quad \varepsilon = \frac{8\alpha b^2}{8\alpha + b^2}. \quad (26)$$

Im folgenden haben wir die Gleichung zu ihrer weiteren Behandlung umgeschrieben in die Form:

$$f_0'' + k^2 f_0 + A_1 e^{-\varepsilon R^2} f_0 + A_2 \int_0^\infty dr' f_0(r') e^{-\lambda(R^2 + r'^2)} (e^{2\mu R r'} - e^{-2\mu R r'}) - C \cdot \frac{\Phi(\zeta R)}{R} f_0(R) = 0 \quad (27)$$

mit den Abkürzungen:

$$k^2 = \frac{4M}{3h^2} E', \quad C = \frac{4M}{3h^2} e^2, \quad \zeta = 2\sqrt{2\alpha}. \quad (28)$$

$$A_1 = \frac{4M}{3h^2} A(2w - b) \left(1 + \frac{b^2}{8\alpha}\right)^{-3/2}; \quad 2w - b = 0.$$

$$A_2 = \frac{4M}{3h^2} \frac{16}{3} A(2m - b) \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{\pi}{4\alpha - b^2}; \quad 2mb - = \frac{5}{4}.$$

Die Lösung von Gleichung (27) ist schwierig. Das für Streurechnungen naheliegendste Verfahren einer numerischen Integration von innen nach außen bis zum Abklingen der Kräfte und Anschließen an die asymptotische Lösung für große R läßt sich in unserem Falle nicht durchführen infolge des Integralgliedes. Dessen Behandlung als Störung, wie es etwa bei Fock für die Elektronenhülle geschieht, erscheint hier auch nicht gerechtfertigt, da es stets einen überwiegenden Anteil der streuenden Kräfte enthält; im speziellen Falle des Dublettzustandes beim Dreikörperproblem enthält es wegen $A_1 = 0$ sogar die *gesamte* streuende Kraft.

Nach längerem Probieren wurde schließlich das folgende Verfahren als das brauchbarste befunden: Wir setzen für die Funktion f_0 bei kleinen R eine Reihenentwicklung an:

$$f_0(R) = N \cdot (a_1 R + a_3 R^3 + a_5 R^5 + \dots) e^{-\varepsilon R^2}. \quad (29)$$

Beim Einsetzen der Entwicklung in (27) haben wir mit dieser Funktion, die sicher nur für kleine R zutrifft, im Austauschgliede über den ganzen Bereich $0 < r' < \infty$ zu integrieren. Nun steht aber im Integranden noch ein Faktor, der exponentiell mit r'^2 abklingt, so daß wir sicher sein können, daß die Gebiete großer r' , in denen unsere Entwicklung merklich falsch wird,

zum Integral nur wenig beitragen. Es wird also gleichgültig sein, ob wir dort unsere Entwicklung oder die richtige Funktion einsetzen. Gleichung (27) geht dann über in eine Summe von Potenzreihen in R , die jeweils mit Exponentialfaktoren multipliziert sind. Das Integralglied erhält dann den Faktor

$$\exp - \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\eta + \lambda} \right) R^2,$$

während die Glieder f_0'' und $k^2 f_0$ den Faktor $e^{-\eta R^2}$ enthalten. Wir verfügen nun über η so, daß diese beiden Exponentialfaktoren übereinstimmen, setzen also

$$\lambda - \frac{\mu^2}{\eta + \lambda} = \eta \quad \text{oder} \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}. \quad (30)$$

Benutzen wir außerdem noch die Abkürzungen

$$\sigma = \eta + \lambda \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\mu}{\eta + \lambda} = \frac{\mu}{\sigma}, \quad (31)$$

so erhalten wir

$$f_0'' + k^2 f_0 + A_1 e^{-\epsilon R^2} f_0 + A_2 e^{-\eta R^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n J_n = 0, \quad (32)$$

mit

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x + \tau R)^n e^{-\sigma x^2}. \quad (33)$$

Die Integrale (33) lassen sich nun wieder leicht ausrechnen, und zwar erhält man

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}, \\ J_3 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{3}{2\sigma} + \tau^2 R^2 \right), \\ J_5 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{15}{4\sigma^2} + \frac{5}{\sigma} \tau^2 R^2 + \tau^4 R^4 \right), \\ J_7 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{105}{8\sigma^3} + \frac{105}{4\sigma^2} \tau^2 R^2 + \frac{21}{2\sigma} \tau^4 R^4 + \tau^6 R^6 \right), \\ J_9 &= \tau R \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left(\frac{945}{16\sigma^4} + \frac{315}{2\sigma^3} \tau^2 R^2 + \frac{189}{2\sigma^2} \tau^4 R^4 + \frac{18}{\sigma} \tau^6 R^6 + \tau^8 R^8 \right). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Entwickelt man in (32) endlich noch $e^{-\epsilon R^2}$ und $\Phi(\zeta R)$ nach Potenzen von R^2 , so kann man überall den Faktor $N \cdot e^{-\eta R^2}$ abspalten und erhält

durch Koeffizientenvergleich in den übrigbleibenden Potenzreihen folgendes Schema linearer Gleichungen für die a_n , wenn wir noch setzen

$$A_2 \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \cdot \tau = A'_2 \quad \text{und} \quad C' = \frac{2\zeta}{1\pi} C. \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} & a_1 (-6\eta + k^2 + A_1 + A'_2 - C') + a_3 \left(6 + \frac{3}{2\sigma} A'_2 \right) \\ & \quad + a_5 \left(\frac{15}{4\sigma^2} A'_2 \right) + a_7 \left(\frac{105}{8\sigma^3} A'_2 \right) + a_9 \left(\frac{945}{16\sigma^4} A'_2 \right) = 0, \\ & a_1 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\zeta^2}{3} \right) + a_3 (-14\eta + k^2 + A_1 - C' + A'_2 \tau^2) \\ & \quad + a_5 \left(20 + \frac{5}{\sigma} A'_2 \tau^2 \right) + a_7 \left(\frac{105}{4\sigma^2} A'_2 \tau^2 \right) + a_9 \left(\frac{315}{2\sigma^3} A'_2 \tau^2 \right) = 0, \\ & a_1 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} A_1 - C' \frac{\zeta^4}{10} \right) + a_3 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\zeta^2}{3} \right) \\ & \quad + a_5 (-22\eta + k^2 + A_1 + A'_2 \tau^4 - C') \\ & \quad + a_7 \left(42 + \frac{21}{2\sigma} A'_2 \tau^4 \right) + a_9 \left(\frac{189}{2\sigma^2} A'_2 \tau^4 \right) = 0, \\ & a_1 \left(-\frac{\varepsilon^3}{6} A_1 + C' \frac{\zeta^6}{42} \right) + a_3 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} A_1 - C' \frac{\zeta^4}{10} \right) \\ & \quad + a_5 \left(4\eta^2 - \varepsilon A_1 + C' \frac{\zeta^2}{3} \right) \\ & \quad + a_7 (-30\eta + k^2 + A_1 + A'_2 \tau^6 - C') + a_9 \left(72 + \frac{18}{\sigma} A'_2 \tau^6 \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Kennt man die Lösung dieser Gleichungen, so kennt man die Funktion $f_0(l)$ in dem Gebiet, wo die Kräfte wirken, bis auf ihre Amplitude, die man aus homogenen Gleichungen natürlich nicht erschließen kann. Schließt man diese Lösung nun an die asymptotische Form (22a) oder (22b) für $l = 0$ an, je nachdem, ob es sich um ein Neutron oder ein Proton handelt, so gestatten die beiden Bedingungen, daß an der Anschlußstelle $R = R_0$ sowohl die Funktion, als die erste Ableitung übereinstimmen sollen, die Berechnung der Phase δ_0 und der Amplitude im Innern.

Für die zahlenmäßige Durchführung haben wir die Kraftkonstanten $A = 30$ und $b = 1$ gewählt¹⁾. Sie sind geeignet zur Darstellung des

¹⁾ Als Einheit der Energie benutzen wir im folgenden stets $10^{-3} Mc^2$, abgekürzt TME (tausendstel Masseneinheit). 1 TME = 0,936 MV. Als Längeneinheit dient der Elektronenradius $e^2/mc^2 = 2,81 \cdot 10^{-13}$ cm. Wo andere Einheiten benutzt werden, sind diese stets ausdrücklich hinzugefügt, z. B. bei den Resultaten für die Wirkungsquerschnitte, wo auf die gebräuchliche Einheit 10^{-24} cm² umgerechnet wurde.

Massendefektes des Deuterons nach (13) und (16); die Ausführung des entsprechenden Minimumproblems ergibt $\alpha = 0,5$. Die Reihenentwicklung wurde nach dem Gliede mit R^7 abgebrochen; man findet dann die in Tabelle 1 zusammengestellten Zahlen.

Tabelle 1.

k^2	a_3/a_1	a_5/a_1	a_7/a_1
0	0,592	0,169	+ 0,0064
0,1205	0,582	0,155	— 0,0026
0,241	0,572	0,142	— 0,0112
0,362	0,561	0,128	— 0,0202

Die Reihenentwicklung konvergiert also recht gut, besonders für kleine Werte von k^2 . Für $R < R_0$ (R_0 = Anschlußstelle) lautet die Eigenfunktion nach (29):

$$f_0^{(i)} = N R P(R) e^{-\eta R^2} \text{ mit } P(R) = 1 + a_3 R^2 + a_5 R^4 + \dots, \quad (37a)$$

wobei wir jetzt speziell $a_1 = 1$ setzen wollen, und die Ableitung

$$f_0^{(i)'} = N Q(R) e^{-\eta R^2} \quad (37b)$$

mit

$$Q(R) = 1 + (3a_3 - 2\eta) R^2 + (5a_5 - 2\eta a_3) R^4 + (7a_7 - 2\eta a_5) R^6 + \dots$$

Für $R > R_0$ dagegen ist nach (22a) für den Neutronenstoß:

$$f_0^{(a)} = \sin(kR + \delta_0), \quad (38a)$$

$$f_0^{(a)'} = k \cos(kR + \delta_0). \quad (38b)$$

Die beiden Anschlußbedingungen liefern dann die Gleichungen:

$$N^{-2} = R_0^2 e^{-2\eta R_0^2} \left\{ \left(\frac{Q(R_0)}{k R_0} \right)^2 + (P(R_0))^2 \right\}, \quad (39)$$

$$\delta_0 = -k R_0 + \arctan \left(k R_0 \frac{P(R_0)}{Q(R_0)} \right). \quad (40)$$

Ein Maß für die Güte der Näherung wird es sein, wie stark die Phase δ_0 davon abhängt, wo wir die Anschlußstelle hinlegen. Wären $f_0^{(i)}$ und $f_0^{(a)}$ beide streng richtige Lösungen, so müßte sich für jedes R_0 exakt dasselbe δ_0 und N^2 ergeben. In Wirklichkeit ist $f_0^{(i)}$ für große R_0 schlecht und $f_0^{(a)}$ für kleine; dazwischen muß irgendwo ein Gebiet liegen, wo beide Funktionen brauchbare Näherungen sind und wo $d\delta_0/dR_0$ verschwindet. Fig. 1 zeigt, daß man für $k^2 = 0,362$, also in einem ziemlich ungünstigen Fall, wo die Reihenentwicklung am schlechtesten konvergiert, immer noch eine hinreichende Konstanz von δ_0 erhält, um Vertrauen in die Methode zu gewinnen.

Wir werden allerdings weiter unten sehen, daß beim Vierkörperproblem die Abweichungen von der Konstanz erheblich größer werden.

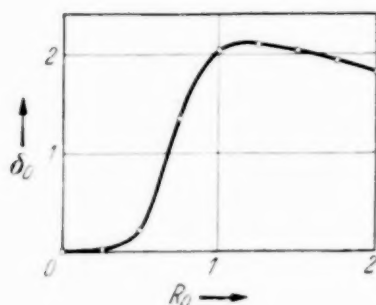


Fig. 1.
Berechnete Phase δ_0 als Funktion der Anschlußstelle R_0 für die Streuung von Neutronen der Energie $E_n = 2,25$ an Deuteronen.

Für die Streuung von Protonen kann die Berechnung der Phasen ganz analog durchgeführt werden durch Anschluß an (22b). Die Formeln sind dann ganz ähnlich wie (39) und (40) gebaut.

5. Ergebnisse und Vergleich mit der Erfahrung für das Dreikörperproblem.

a) *Streuung von Neutronen an Deuteronen.* Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie man die Phase δ_0 berechnen kann. Der Wirkungsquerschnitt wird nach einer bekannten Formel:

$$\Phi = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{3} \sin^2 \delta_0. \quad (41)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß nur der Dublettzustand (Gewicht $\frac{1}{3}$) zur Streuung beiträgt, und daß auch hier nur die zentralen Stöße mit $l = 0$ Beiträge liefern. Im vorigen Abschnitt wurde klargelegt, warum diese beiden Voraussetzungen weitgehend zutreffen dürften. k^2 ist bis auf einen Faktor die kinetische Energie des stoßenden Teilchens, und zwar ist beim Stoß eines Neutrons der kinetischen Energie E_n gegen ein ruhendes Deuteron

$$k^2 = \frac{4M}{3h^2} E' = \frac{4M}{3h^2} \frac{2}{3} E_n = 0,1605 E_n. \quad (42)$$

Bei Berechnung von δ_0 nach der geschilderten Methode erhält man hieraus die in Fig. 2 dargestellte Wirkungsquerschnittskurve.

Zur Kritik des Verfahrens zeigt Fig. 3 die berechneten Wirkungsquerschnitte als Funktion der willkürlichen Anschlußstelle für die Energie $E_n = 0$ und für die Energie $E_n = 2,25$ TME. Gewählt wurde jeweils der im Minimum von der Funktion angenommene Wert. Man sieht sofort, daß die Unabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Anschlußstelle

für die größere Energie einigermaßen gewahrt ist, dagegen für $E_n = 0$ der Schluß, der lediglich auf der Lage des Minimums aufbaut, etwas gewagt ist.

Der Vergleich mit dem Experiment kann nur sehr bedingt durchgeführt werden, da es schwierig ist, die Energie schneller Neutronen genau anzugeben. Ältere Messungen von Dunning und Mitarbeitern¹⁾ führten zu zwei Zahlen für die totale Schwächung eines Neutronenstromes in einer Deuteriumschicht: Für thermische (C-)Neutronen, also für $E_n = 0$, erhalten sie

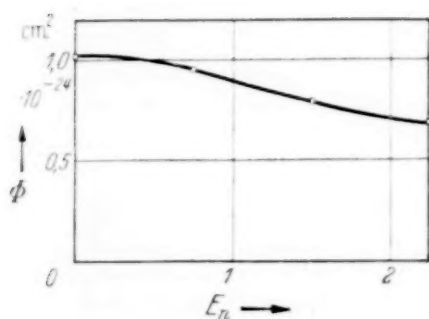


Fig. 2. Berechnete Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen an Deuteronen.

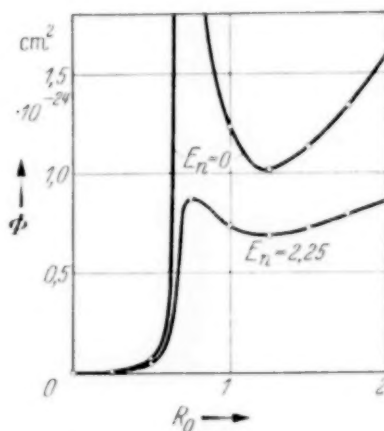


Fig. 3. Änderung des Wirkungsquerschnitts für die Streuung von Neutronen an Deuteronen bei Variation der Anschlußstelle.

$\Phi = 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ und im Falle „schneller“ Neutronen, die alle möglichen Geschwindigkeiten zwischen 1 V und 10 MV umfassen, $\Phi = 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Diese Zahlen sind noch nicht unmittelbar vergleichbar mit unseren theoretischen Ergebnissen. Bei C-Neutronen ist zu beachten, daß ihre kinetische Energie klein ist gegen die Bindungsenergie der Deuteronen im Molekularverbande. Sie können daher keinen Impuls an die Deuteronen abgeben; die reduzierte Masse des Systems ist einfach gleich der Masse M des Neutrons, während für die Streuung an freien Deuteronen die reduzierte Masse $\frac{2}{3} M$ auftritt. Da die Wirkungsquerschnitte proportional sind dem Quadrat der reduzierten Masse, folgt

$$\frac{\Phi_{\text{frei}}}{\Phi_{\text{gebunden}}} = \frac{4}{9}. \quad (43)$$

Der Dunningsche Wert für C-Neutronen ist zum Vergleich mit der Theorie also zu ersetzen durch $1,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, was mit dem theoretischen Wert

¹⁾ J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1935.

$1,9 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ einigermaßen vergleichbar ist. Neuere Messungen von Goldhaber und Briggs¹⁾ ergeben den Wert $7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, auf freie Deuteronen korrigiert also $3,1 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, was hiermit schlechter übereinstimmt.

Der von Dunning²⁾ für „schnelle“ Neutronen angegebene mittlere Wirkungsquerschnitt scheint ebenfalls etwas reichlich groß. Der geringe Unterschied zwischen diesem Wert und dem von Dunning für *C*-Neutronen gefundenen würde gut zu dem theoretischen Befund passen, daß der Wirkungsquerschnitt mit abnehmender Energie nur sehr langsam ansteigt. Doch scheinen sowohl die theoretischen als die experimentellen Zahlen im Augenblick noch als zu unsicher, um auf einen solchen Vergleich allzuviel zu geben. Es sollte nur veranschaulicht werden, wie groß die Unsicherheit noch ist, und in welchem Maße man ungefähr Übereinstimmung erwarten darf.

b) *Streuung von Protonen an Deuteronen.* Bei Anwesenheit eines Coulomb-Feldes erhält man nach (20b) für das Amplitudenquadrat der Streuwelle, sobald es genügt, sich auf den kugelsymmetrischen Anteil mit $l=0$ zu beschränken:

$$J = \left| -\frac{\alpha_0}{2kR \sin^2 \frac{\Theta}{2}} e^{-i \frac{l\pi}{2}} + \frac{1}{2ikR} (e^{2i\delta_0} - 1) \right|^2. \quad (44)$$

Es ist üblich, das Verhältnis der in einen Winkelbereich $2\pi \sin \Theta d\Theta$ gestreuten Intensität zu derjenigen anzugeben, die nach dem Rutherford'schen Gesetz (also für $\delta_0 = 0$) in diesen Bereich gelangen würde. Man erhält für dieses Verhältnis, wenn man wieder berücksichtigt, daß nur der Dublett-zustand beiträgt:

$$R = \frac{\frac{1}{3} J_{\text{Dublett}} + \frac{2}{3} J_{\text{Quartett}}}{J_{\text{Rutherford}}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{J_{\text{Dublett}}}{J_{\text{Rutherford}}}, \quad (45)$$

und weiter aus (44)

$$R = 1 + \frac{4}{3\alpha_0} \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin \delta_0 \cos \left(\delta_0 + \alpha_0 \ln \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right) + \frac{4}{3\alpha_0^2} \sin^4 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \sin^2 \delta_0. \quad (46)$$

¹⁾ M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) 162, 127, 1937. — ²⁾ Siehe Fußnote 1 auf voriger Seite.

Dabei rechnet man von dem Winkel Θ im Schwerpunktsystem um auf den Winkel ϑ im Koordinatensystem der Beobachtung, in dem das Teilchen der Masse M_1 auf das ruhende der Masse M_2 stößt, nach der Formel:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{M_1}{M_2}}. \quad (47)$$

Experimente wurden bisher nur von Tuve, Heydenburg und Hafstad¹⁾ ausgeführt für den Stoß von Protonen von 830 kV auf Deuteronen. Dann ist $M_1/M_2 = 1/2$.

Die Berechnung von δ_0 hängt auch hier wieder von der Anschlußstelle ab, wie Fig. 4 zeigt. Als bester Wert wurde das Maximum $\delta_0 = 2,277$ ($R_0 = 1,25$) eingesetzt, womit sich für das Streuverhältnis R Werte ergaben,

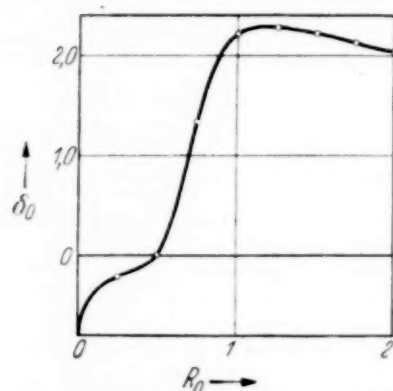


Fig. 4. Berechnete Phase δ_0 als Funktion der Anschlußstelle R_0 für die Streuung von 830 kV-Protonen an Deuteronen.

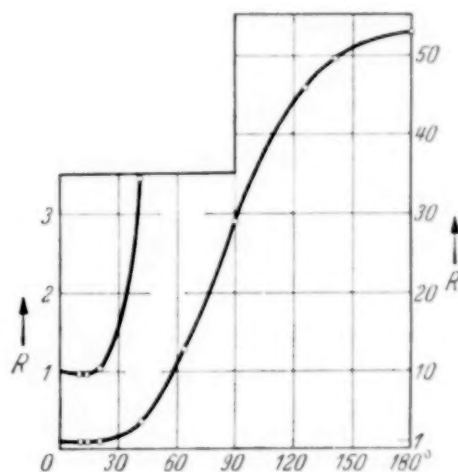


Fig. 5. Berechnetes Streuverhältnis R als Funktion des Streuwinkels für die Streuung von 830 kV-Protonen an Deuteronen.

die von 1 bei 0° bis auf 53 bei 180° ansteigen. Fig. 5 veranschaulicht diesen Verlauf; links ist der Anstieg der Kurve bei kleinen Winkeln in größerem Ordinatenmaßstab noch einmal herausgezeichnet.

Die von Tuve und Mitarbeitern angegebenen Meßpunkte stimmen im Bereich der Vorwärtsstreuung, d. h. für Ablenkungen bis zu 90° quantitativ mit den theoretischen Werten überein. Für größere Winkel dagegen ergibt sich ein völlig von der theoretischen Erwartung abweichendes Bild. Bei $\vartheta = 126^\circ$ erhalten sie statt unseres Wertes $R = 45,7$ einen jähen Anstieg

¹⁾ M. A. Tuve, N. P. Heydenburg u. L. R. Hafstad, Phys. Rev. **50**, 806, 1936.

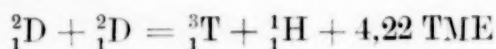
der Kurve auf $R = 2275$. Dazu ist zu bemerken: Ein so schroffer Anstieg ist sicher in keiner Weise zu verstehen. Selbst bei Mitwirken von P -Streuung in beträchtlichem Umfange, die sich auch in einem Beitrag des Quartettzustandes zur Streuung äußern würde, könnte man niemals eine Diskrepanz um einen Faktor 50 verstehen, wie sie hier vorläge. Sollte sich daher das Tuvesche Ergebnis bewahrheiten, so läge eine ernste Schwierigkeit vor, da es unabhängig von der Art unserer Näherung in Widerspruch stände zu den Grundlagen der Wellenkinematik und damit der quantenmechanischen Methode überhaupt¹⁾.

Nun bezeichnen die Autoren ihre Ergebnisse allerdings selbst erst als vorläufig. Der auffällige Unterschied zwischen dem Bereich der Vorwärts- und Rückwärtsstreuung geht vielleicht teilweise doch zurück auf das verschiedene experimentelle Verfahren, was sie in diesen beiden Gebieten anwenden: Im vorwärtsliegenden Winkelbereich ($\vartheta < 90^\circ$) zählen sie die Zahl der gestreuten Protonen aus; im rückwärtsliegenden dagegen, wo deren Intensität sehr stark abgenommen hat, die Zahl der vorwärtslaufenden Rückstoßdeuteronen. Es wird sich also empfehlen, weitere Angaben der Autoren abzuwarten.

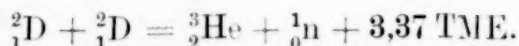
Es soll nicht unbemerkt bleiben, daß die quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im Bereich der Vorwärtsstreuung durchaus zufällig sein kann; doch sollte der allgemeine Verlauf von Streuexperimenten durch die Kurve Fig. 5 bis auf einen Faktor 2 bei 180° dargestellt werden.

6. Berechnung der Eigenfunktionen für das Vierkörperproblem.

Nachdem wir am einfachen Falle des Dreikörperproblems unsere Methode studiert haben, können wir uns dem schwierigeren, aber interessanten Vierkörperproblem zuwenden. Hier hat praktisches Interesse nur der eine Fall, daß das stoßende Teilchen ebenfalls ein Deuteron ist, und die Reaktion eintritt:



oder



Hier tritt also zum ersten Male eine im eigentlichen Sinne kernchemische Umwandlung ein. Es genügt daher nicht mehr die Betrachtung eines stationären Zustandes, der sowohl das Verhalten vor als nach dem Stoß

¹⁾ Diese Schwierigkeit wird auch in der inzwischen erschienenen Arbeit von H. Primakoff, Phys. Rev. **52**, 1000, 1937, diskutiert.

umfaßt, sondern es ist notwendig, die Wahrscheinlichkeit auszurechnen für den Übergang eines Anfangszustandes aus zwei Deuteronen in einen Endzustand aus Triton und Proton. Dabei wollen wir zunächst nur die Übergänge zwischen Zuständen betrachten, welche den Drehimpuls $l = 0$ sowohl vor als nach dem Stoß haben. Dann muß auch der Spin des Systems vor und nach dem Stoß der gleiche sein. Wir haben also drei Möglichkeiten:

a) *Quintettzustand* (Gewicht $\frac{5}{9}$): Die Spins der beiden Deuteronen stehen parallel, $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 2$. Da nach dem Stoß zwei Teilchen entstehen, deren jedes nur den Spin $1/2$ hat, kann dieser Zustand nicht vor und nach dem Stoß den Bahnimpuls $l = 0$ haben und gleichzeitig seinen Gesamtdrehimpuls behalten. Der Quintettzustand liefert also erst Beiträge zur P -Umwandlung.

b) *Triplettzustand* (Gewicht $\frac{3}{9}$): $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 1$. Hier ist es nun zwar möglich, auch nach dem Zusammenstoß den Spin 1 zu bewahren, indem man die Spins von Triton und Proton parallel stellt. Nun verdankt aber das Triton seinen ganzen Spin dem in ihm gebundenen Proton; mit anderen Worten: Im Endzustand muß die Eigenfunktion in den Spins (und Ladungen) der beiden Protonen symmetrisch sein, also antisymmetrisch in ihren Örtern. Das ist aber unverträglich mit der Kugelsymmetrie; der Triplettzustand trägt ebenfalls erst zur P -Umwandlung bei.

c) *Singulettzustand* (Gewicht $\frac{1}{9}$): $|\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2| = 0$. Nach dem Stoß müssen die Spins von Triton und Proton antiparallel stehen, also auch die Spins der beiden Protonen. Nur hier ist es möglich, sowohl vor als nach dem Stoß einen kugelsymmetrischen Zustand, also S -Umwandlung, zu bekommen.

Wir stellen fest, daß wir für die Berechnung der S -Umwandlung, wie sie in dieser Arbeit ausschließlich durchgeführt werden soll, uns begnügen dürfen mit der Betrachtung des Singulettzustandes und von vornherein den Gewichtungsfaktor $\frac{1}{9}$ im Wirkungsquerschnitt anzubringen haben.

Gleichzeitig erklärt dieser Sachverhalt vielleicht auch die Beobachtung von Neuert¹⁾, sowie von Kempton, Browne und Maasdorp²⁾, daß schon für sehr langsame Deuteronen von 100 bis 200 kV Energie sich keine im Schwerpunktsystem kugelsymmetrische Richtungsverteilung der bei der Umwandlung entstehenden Protonen ergab, sondern ihre Intensität als Funktion des Winkels etwa das Gesetz

$$J \sim 2 + \cos^2 \theta$$

¹⁾ H. Neuert, Phys. ZS. **38**, 122, 1937. — ²⁾ A. E. Kempton, B. C. Browne u. R. Maasdorp, Proc. Roy. Soc. London (A) **157**, 386, 1937.

befolgt¹⁾. Die P -Umwandlung sollte also ungefähr halb soviel zum Wirkungsquerschnitt beitragen wie die S -Umwandlung. Mit anderen Worten: Die S -Umwandlung ist durch eine Auswahlregel zwar nicht völlig, aber doch zum größten Teil verboten; während sie sonst die P -Umwandlung weit überwiegen würde, macht sie in Wirklichkeit nur noch ungefähr das Doppelte davon aus. Ein solches „Beinaheverbotensein“ bedeutet aber gerade unser Gewichtsfaktor $\frac{1}{9}$.

Wir müssen uns hier mit diesem qualitativen Hinweis begnügen, da eine quantitative Bestimmung des Verhältnisses von S - und P -Umwandlung zueinander schwierig ist und wohl auch außerhalb der Tragweite unseres Näherungsverfahrens liegt. Wir beschränken uns daher im folgenden ausschließlich auf die Betrachtung des Singulettüberganges allein.

Schreiben wir für die Ortsfunktion, welche besagt, daß 1 und 2 das erste, 3 und 4 das zweite Deuteron bilden, kurz:

$$\varphi(\overline{12}, \overline{34}) = \varphi_{12}, \quad (48)$$

so können wir die Eigenfunktion des Anfangszustandes schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_a = & \varphi(\overline{12}, \overline{34}) \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \beta_4 (a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_3 b_4 - a_4 b_3) \\ & + \varphi(\overline{34}, \overline{12}) \beta_1 \beta_2 \alpha_3 \alpha_4 (a_1 b_2 - a_2 b_1) (a_3 b_4 - a_4 b_3) \\ & - \varphi(\overline{23}, \overline{41}) \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_4 (a_2 b_3 - a_3 b_2) (a_4 b_1 - a_1 b_4) \\ & - \varphi(\overline{41}, \overline{23}) \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \alpha_4 (a_2 b_3 - a_3 b_2) (a_4 b_1 - a_1 b_4) \\ & - \varphi(\overline{31}, \overline{24}) \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_4 (a_1 b_3 - a_3 b_1) (a_2 b_4 - a_4 b_2) \\ & - \varphi(\overline{24}, \overline{31}) \beta_1 \alpha_2 \beta_3 \alpha_4 (a_1 b_3 - a_3 b_1) (a_2 b_4 - a_4 b_2) \end{aligned} \quad (49)$$

Für den Endzustand soll

$$\varphi(\overline{123}, 4) = \varphi_4 \quad (50)$$

bedeuten: Das vierte Teilchen ist das freie Proton, während 1, 2 und 3 das Triton bilden. Die Eigenfunktion eines Tritons ist in der zitierten Arbeit des Verfassers angegeben; sie ist das Produkt einer Ortsfunktion mit dem Spin-Ladungsfaktor:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_3 \cdot a_1 a_2 b_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_1 \cdot a_2 a_3 b_1 \\ + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_1 b_2. \end{aligned} \quad (51)$$

¹⁾ Nach einer Angabe von Oliphant auf der Konferenz in Kopenhagen, Sept. 1937, erhält man für die alternative Emission der Neutronen praktisch kugelsymmetrische Richtungsverteilung. Die Frage dürfte also auch experimentell noch nicht ganz geklärt sein. Ich danke Frau Prof. Meitner für den freundlichen Hinweis auf diese Mitteilung.

Die Gesamteigenfunktion für den Endzustand lautet daher:

$$\begin{aligned} \psi_e = & q_4 \beta_4 b_4 [(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_3 \cdot a_1 a_2 b_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_1 a_2 a_3 b_1 \\ & + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_1 b_2] \\ & - q_3 \beta_3 b_3 [(\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4) \alpha_2 \cdot a_4 a_1 b_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha_4 a_1 a_2 b_4 \\ & + (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2) \alpha_1 \cdot a_2 a_4 b_1] \\ & + q_2 \beta_2 b_2 [(\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3) \alpha_1 \cdot a_3 a_4 b_1 + (\alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4) \alpha_3 \cdot a_4 a_1 b_3 \\ & + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \alpha_4 \cdot a_1 a_3 b_4] \\ & - q_1 \beta_1 b_1 [(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \alpha_4 \cdot a_2 a_3 b_4 + (\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3) \alpha_2 \cdot a_3 a_4 b_2 \\ & + (\alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4) \alpha_3 \cdot a_4 a_2 b_3]. \end{aligned} \quad (52)$$

Unser Verfahren läuft nun ganz analog zu dem beim Dreikörperproblem ausgeführten weiter. Wir schreiben zunächst die durch Summation über Spin und Ladung entstehenden Schrödinger-Gleichungen für den Anfangs- und Endzustand hin, also die Analoga zu Gleichung (7):

Anfangszustand:

$$\begin{aligned} T q_{12} + \{ & (M_{12} + W_{12} + H_{12} + B_{12}) + (M_{34} + W_{34} + H_{34} + B_{34}) \\ & + (W_{13} - H_{13}) + (W_{24} - H_{24}) + W_{14} + W_{23} \} q_{12} \\ & + (M_{13} - B_{13}) q_{23} + (M_{24} - B_{24}) q_{14} + M_{14} q_{24} \\ & + M_{23} q_{13} = E \cdot q_{12}. \end{aligned} \quad (53)$$

Endzustand:

$$\begin{aligned} T q_4 + \{ & (M_{12} + W_{12} + H_{12} + B_{12}) + (M_{13} + W_{13} - H_{13} - B_{13}) \\ & + (M_{23} + W_{23}) + W_{14} + (W_{24} - H_{24}) + (W_{34} + B_{34}) \} q_4 \\ & + M_{14} q_1 + (M_{24} - B_{24}) q_2 + (M_{34} + H_{34}) q_3 = E \cdot q_4. \end{aligned} \quad (54)$$

Für die Lösung machen wir wieder den analogen Ansatz wie im Falle des Dreikörperproblems: Im Anfangszustand setzen wir

$$q_{12} = e^{-\alpha(r_{12}^2 + r_{34}^2)} f\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}\right). \quad (55)$$

D. h. wir nehmen an, daß die Wechselwirkung der beiden Deuteronen lediglich darin besteht, daß sie die Bewegung ihrer Schwerpunkte zueinander gegenseitig beeinflussen, nicht aber sich gegenseitig polarisieren.

Wir führen die Koordinaten ein

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{4} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_3 + \frac{1}{4} \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_1 &= s + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_1 & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R}_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; & \mathbf{r}_2 &= s - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_1 & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R}_2 &= & \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_3 &= s & + \frac{1}{2} \mathfrak{R}_2 - \frac{1}{2} \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{r}_4; & \mathbf{r}_4 &= s & - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_2 - \frac{1}{2} \mathfrak{R}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \Delta_s + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_1} + 2 \Delta_{\mathfrak{R}_2} + \Delta_{\mathfrak{R}}. \quad (57)$$

Geht man in (54) mit dem Ansatz (55) ein und übt den Operator

$$\int d\mathfrak{s} d\mathfrak{R}_1 d\mathfrak{R}_2 e^{-\alpha(\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2)}$$

darauf aus, so bleibt eine zu (19) analoge Gleichung stehen, nämlich:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathfrak{R}} f(\mathfrak{R}) + \left(\frac{6\hbar^2}{M} \alpha - E \right) f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(m + w + b + b) \left(1 + \frac{b^2}{2\alpha} \right)^{-3/2} f(\mathfrak{R}) + \frac{e^2}{R} \Phi(2\sqrt{\alpha} R) f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(2w - b) \left(1 + \frac{b^2}{4\alpha} \right)^{-3/2} e^{-\frac{4\alpha b^2}{4\alpha + b^2} \mathfrak{R}^2} f(\mathfrak{R}) \\ & - 2A(2m - b) \cdot 8 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} e^{-(2\alpha + b^2) \mathfrak{R}^2} \int d\mathfrak{R}' e^{-(2\alpha + b^2) \mathfrak{R}'^2 + 2b^2 \mathfrak{R} \mathfrak{R}'} f(\mathfrak{R}') = 0. \quad (58) \end{aligned}$$

Hierin bedeutet die Größe

$$\frac{6\hbar^2}{M} \alpha - 2A(m + w + b + b) \left(1 + \frac{b^2}{2\alpha} \right)^{-3/2} = 2E_D \quad (59)$$

zweimal den Massendefekt des Deuterons, also $= -4,6 \text{ TME}$.

Die analoge Behandlung der Gleichung (54) für den *Endzustand* erfolgt auf Grund des Ansatzes:

$$\varphi_4 = e^{-\beta(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)} f\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - r_4\right), \quad (60)$$

der besagt, daß das Triton durch das Proton nicht polarisiert wird. Diese Voraussetzung ist wahrscheinlich weniger gut erfüllt als die analoge für den Anfangszustand, denn es ist zwar die Bindungsenergie des Tritons mit rund 9 TME sehr viel größer als die der Deuteronen, dafür ist aber auch die kinetische Energie der Teilchen im Endzustand viel größer, nämlich um rund die Hälfte hiervon. Als Koordinaten wählen wir sinngemäß:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{s} &= \frac{1}{4} r_1 + \frac{1}{4} r_2 + \frac{1}{4} r_3 + \frac{1}{4} r_4; & r_1 &= \mathfrak{s} + \frac{2}{3} \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R}_1 &= r_1 - r_2; & r_2 &= \mathfrak{s} - \frac{1}{3} \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R}_2 &= r_2 - r_3; & r_3 &= \mathfrak{s} - \frac{1}{3} \mathfrak{R}_1 - \frac{2}{3} \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{4} \mathfrak{R}; \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{3} r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{3} r_3 - r_4; & r_4 &= \mathfrak{s} - \frac{3}{4} \mathfrak{R}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \Delta_{\mathfrak{s}} + \frac{4}{3} \Delta_{\mathfrak{R}} + 2\Delta_{\mathfrak{R}_1} + 2\Delta_{\mathfrak{R}_2} - 2\nabla_{\mathfrak{R}_1} \cdot \nabla_{\mathfrak{R}_2}. \quad (62)$$

In der Wahl der Koordinaten \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 liegt natürlich eine gewisse Willkür, die sich aber wohl nicht vermeiden läßt. Bildet man die zu (58) analoge Gleichung, so entsteht

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3} \frac{h^2}{M} A \mathfrak{f}(\mathfrak{R}) + \left(\frac{9h^2}{M} \beta - E \right) f(\mathfrak{R}) - 3A(m+w) \left(1 + \frac{b^2}{3\beta} \right)^{-3/2} f(\mathfrak{R}) \\
 & - A(3w+b-b) \left(1 + \frac{b^2}{9\beta} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{9\beta b^2}{9\beta + b^2} \mathfrak{R}^2 \right) f(\mathfrak{R}) \\
 & \quad + \frac{e^2}{R} \Phi(3\sqrt{\beta} R) f(\mathfrak{R}) \\
 & - A(3m-b+b) \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^3 \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} \int d\mathfrak{R}' \exp \left[-\frac{45}{16} \beta (\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \frac{6}{5} \mathfrak{R} \mathfrak{R}') \right. \\
 & \quad \left. - \frac{9}{16} b^2 (\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')^2 \right] f(\mathfrak{R}') = 0. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Dabei können die beiden Glieder

$$\frac{9h^2}{M} \beta - 3A(m+w) \left(1 + \frac{b^2}{3\beta} \right)^{-3/2} = E_T = -9TME, \quad (64)$$

zum Massendefekt des Tritons zusammengefaßt werden.

In die Gleichungen (58) und (63) führen wir als nächsten Schritt nun die Voraussetzung der *Kugelsymmetrie* ein:

$$f(\mathfrak{R}) = \frac{1}{R} f_0(R). \quad (65)$$

Dann kann man im Integralgliede jeweils die Integration über die Winkel ganz ähnlich wie früher ausführen. Man wird in beiden Fällen auf eine Gleichung geführt vom Typus der Gleichung (27), in der nur die Konstanten $k^2, A_1, A_2, \varepsilon, \lambda, \mu, C, \zeta$ jetzt andere Werte haben als beim Dreikörperproblem. Auch das Lösungsverfahren, also Reihenentwicklung nach (29) und Zurückführung auf das lineare Gleichungssystem (36), kann man genau so durchführen wie früher. Es ist also nur noch nötig, die Werte der genannten Konstanten anzugeben, und zwar erhält man Tabelle 2.

Die Zahlenwerte, mit denen gerechnet wurde, sind $A = 30$, $b = 1$ und die sich aus Gleichung (59) und (64) ergebenden zugehörigen $\alpha = 0,5$ und $\beta = 0,35$, die jeweils die Energie des Deuterons bzw. des Tritons zu einem Minimum machen. Die Größe E' bezeichnet die Energie im Schwerpunktsystem; im Anfangszustand ist daher $E' = \frac{1}{2} E_0$, wenn E_0 die kinetische Energie des stoßenden Deuterons ist, und im Endzustand $E' = \frac{1}{2} E_0 + U$, wenn U die Wärmetönung ($= 4,22$) ist.

Tabelle 2.

Koeffizient	Anfangszustand	Endzustand
k^2	$k^2 = \frac{2 M E'}{h^2}; E' = E - 2E_D$	$k'^2 = \frac{3 M}{2 h^2} E'; E' = E - E_T$
A_1	$\frac{4 M}{h^2} A (2w - b) \left(1 + \frac{b^2}{4\alpha}\right)^{-3/2}$ $2w - b = 0$	$\frac{3 M}{2 h^2} A (3w + b - b) \left(1 + \frac{b^2}{9\beta}\right)^{-3/2}$ $3w + b - b = \frac{1}{3}$
A_2	$\frac{2 M}{h^2} \cdot 16 A (2m - b) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}$ $2m - b = \frac{5}{4}$	$\frac{3 M}{2 h^2} A \left(\frac{9}{4}\right)^3 (3m - b + b) \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}$ $3m - b + b = \frac{23}{12}$
ε	$\frac{4\alpha b^2}{4\alpha + b^2}$	$\frac{9\beta b^2}{9\beta + b^2}$
λ	$2\alpha + b^2$	$\frac{9}{16} (5\beta + b^2)$
μ	b^2	$\frac{9}{16} (3\beta - b^2)$
$\eta = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$2\sqrt{\alpha(\alpha + b^2)}$	$\frac{9}{4} \sqrt{\beta(\beta + b^2)}$
σ, τ	$\sigma = \eta + \lambda; \tau = \frac{\mu}{\sigma}$	$\sigma = \eta + \lambda; \tau = \frac{\mu}{\sigma}$
A_2'	$A_2 \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{3/2}$	$A_2 \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{3/2}$
C	$\frac{2 M}{h^2} e^2$	$\frac{3 M}{2 h^2} e^2$
ζ	$2\sqrt{\alpha}$	$3\sqrt{\beta}$
$C' = \frac{2\zeta}{\sqrt{\pi}} C$	$8 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{M e^2}{h^2}$	$9 \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \frac{M e^2}{h^2}$

Setzt man wieder $a_1 = 1$, so lauten die Koeffizienten für den Anfangszustand numerisch:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= 0,225 - 0,0615 k^2, \\ a_5 &= -0,280 - 0,0660 k^2, \\ a_7 &= -0,316 - 0,0423 k^2, \\ a_9 &= -0,1826 - 0,0197 k^2, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

und für den Endzustand, wo wir a'_i statt a_i schreiben wollen:

$$\left. \begin{aligned} a'_3 &= 0,1510 - 0,0755 (k'^2 - 1,160), \\ a'_5 &= -0,285 - 0,0717 (k'^2 - 1,160), \\ a'_7 &= -0,249 - 0,0514 (k'^2 - 1,160). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Dabei ist 1,160 der Wert von k'^2 für 100 kV. Die Korrekturen in (66) und (67), die durch die Abhängigkeit von k^2 und k'^2 hineinkommen, sind durchweg klein für kinetische Stoßenergien bis zu einigen hundert kV. Sie wurden jedoch berücksichtigt. Man sieht, daß die Koeffizienten hier sehr viel langsamer abklingen wie im Falle des Dreikörperproblems. Die Konvergenz ist schlechter, und die Resultate mögen quantitativ nicht allzu zuverlässig sein, dürften aber auf jeden Fall die Größenordnung der Erscheinung richtig wiedergeben.

Als Normierung wollen wir vorläufig annehmen, daß im Außenraum die Funktion durch Gleichung (22b) mutatis mutandis dargestellt wird. Den Normierungsfaktor, der den Anschluß hieran erlaubt, nennen wir wieder N , bzw. N' für den Endzustand. Dabei können wir im Endzustand genau wie früher verfahren und finden bei 100 kV $N' = 1,067$, wenn wir die Anschlußstelle $R_0 = 1$, und $N' = 1,356$, wenn wir $R_0 = 1,5$ wählen.

Im Anfangszustand dagegen liegen die Verhältnisse ein wenig komplizierter. Hier ist die Energie der Teilchen so klein (z. B. 100 kV), daß wir uns noch unterhalb des Gipfels des Gamow-Berges befinden. Die asymptotische Lösung (22b) ist aber nur dann verwendbar, wenn die kinetische Energie des stoßenden Teilchens groß wird gegen den Betrag der Coulomb-Abstoßung. Das tritt, wie man sich leicht ausrechnet, erst sehr weit außen, für $R = 10$ bis 20 Elektronenradien ein, wo unsere Reihenentwicklung (66) längst nicht mehr konvergiert. Infolgedessen wurde die Anschlußstelle R_0 , bis zu der (66) benutzt wird, wie bisher in eine Gegend gelegt, wo die eigentlichen Kernkräfte ziemlich abgeklungen sind (1 bis 2 El. Rad.) und von da ab durch den Gamow-Berg hindurch die Differentialgleichung unter Auslassung der Glieder mit den Kernkräften, aber unter Mitnahme des Coulomb-Feldes, numerisch integriert bis zu so großen R -Werten, daß die asymptotische Darstellung anwendbar ist. Auf diese Weise wurden folgende Amplitudenwerte für den Anfangszustand erhalten (Anschlußstelle $R_0 = 1,5$; in dieser Gegend ist N ziemlich unabhängig von R_0 , für größere R_0 dagegen wächst es an) (siehe Tabelle 3).

Dabei sind in der letzten Spalte die „Gamow-Faktoren“ zusammengestellt. Hätte man ein reines Coulomb-Feld, so wäre der Wert der Eigen-

funktion $f = \frac{1}{R} f_0(R)$ an der Stelle $R = 0$ nicht, wie es hier herauskommt,

$= N$, sondern $= \sqrt{G}$. Daher stellt \sqrt{G} den Anteil dar, den das Coulomb-Feld zur Verkleinerung der Amplitude im Innern beiträgt. Für die Diskussion der Eigenfunktionen vgl. Abschnitt 8.

Tabelle 3.

E_0	N	Nk	\sqrt{G}
0,1	0,0473	0,353	0,218
0,2	0,1061	0,560	0,364
0,3	0,1540	0,662	0,450
0,5	0,233	0,777	0,550
0,7	0,294	0,827	0,610

7. Berechnung der Wirkungsquerschnitte für die $D + D$ -Reaktion.

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes müssen wir zunächst das Matrixelement für den Übergang aus dem Anfangs- in den Endzustand kennen:

$$H_{ae} = \frac{\int \Psi_e^* V \Psi_a d\tau}{\sqrt{\int \Psi_e^* \Psi_e d\tau} \cdot \sqrt{\int \Psi_a^* \Psi_a d\tau}}, \quad (68)$$

wobei V den gesamten Operator der potentiellen Energie des Systems bedeutet, also die Summe von sechs Ausdrücken der Form Gleichung (1) in den sechs möglichen Kombinationen je zweier Teilchenabstände. Normiert man die Eigenfunktion so, daß

$$\int d\tau \varphi_{12}^2 = 1, \quad \int d\tau \varphi_4^2 = 1 \quad (69)$$

wird, so wird

$$H_{ae} = -A \int d\tau e^{-b^2 r_{12}^2} \{ \varphi_1 [\varphi_{13} (b - 2m) + \varphi_{24} (b - 2w) - \varphi_{34}] + \varphi_3 [-\varphi_{12} + (-2w + b - 2m + b) \varphi_{24}] \}. \quad (70)$$

Darin ist

$$b - 2m = -\frac{5}{4}, \quad b - 2w = 0, \quad -2w + b - 2m + b = -\frac{5}{4}.$$

Statt dessen können wir auch schreiben

$$H_{ae} = -A \int d\tau \varphi_1 \varphi_{13} \left\{ -\frac{5}{4} e^{-b^2 r_{12}^2} - e^{-b^2 r_{13}^2} - e^{-b^2 r_{24}^2} - \frac{5}{4} e^{-b^2 r_{23}^2} \right\}, \quad (71)$$

unter der Voraussetzung, daß $\varphi_{12} = \varphi_{34}$ ist, d. h. daß die Eigenfunktion des Anfangszustandes invariant ist gegen eine Vertauschung der beiden Deuteronen, wie es für S -Zustände der Fall ist. Für die Integration erweist es sich als zweckmäßig, die Koordinaten einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{4} r_1 + \frac{1}{4} r_2 + \frac{1}{4} r_3 + \frac{1}{4} r_4; & r_1 &= s & -\frac{3}{4} \mathfrak{R}_e \\ \mathfrak{R}_e &= -r_1 + \frac{1}{3} r_2 + \frac{1}{3} r_3 + \frac{1}{3} r_4; & r_2 &= s - r & -\frac{3}{4} \mathfrak{R}_e \\ \mathfrak{R}_a &= \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2 + \frac{1}{2} r_3 - \frac{1}{2} r_4; & r_3 &= s & + \mathfrak{R}_a + \frac{3}{4} \mathfrak{R}_e \\ r &= r_1 - r_2; & r_4 &= s + r - \mathfrak{R}_a + \frac{3}{4} \mathfrak{R}_e \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Auf diese Weise entsteht aus (71):

$$H_{ae} = -A \int d\mathfrak{s} d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e dr \exp \left\{ \beta \left(\frac{9}{2} \mathfrak{R}_e^2 + 6 \mathfrak{R}_a^2 + 6 r^2 + 9 \mathfrak{R}_e r - 6 \mathfrak{R}_a r \right) \right. \\ \left. + \alpha \left(\frac{9}{2} \mathfrak{R}_e^2 + 2 \mathfrak{R}_a^2 + 4 r^2 + 6 \mathfrak{R}_e r - 4 \mathfrak{R}_a r \right) \right\} \\ \cdot f^{(a)}(\mathfrak{R}_a) f^{(e)}(\mathfrak{R}_e) \cdot \left\{ -\frac{5}{4} e^{-b^2 r^2} - e^{-b^2 \left(\frac{3}{2} \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_a \right)^2} - e^{-b^2 \left(-\frac{3}{2} \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_a - 2r \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{5}{4} e^{-b^2 \left(-\frac{3}{2} \mathfrak{R}_e - \mathfrak{R}_a - r \right)^2} \right\}. \quad (73)$$

Die Integration über \mathfrak{s} gibt einfach als Faktor das Normierungsvolumen V . Die Integration über r kann ausgeführt werden ohne Kenntnis der Funktionen $f^{(a)}$ und $f^{(e)}$ für Anfangs- und Endzustand. Sie wurde sofort numerisch durchgeführt mit den obengenannten Zahlenwerten der Konstanten A , b , α , β ; nach ihrer Durchführung bleiben noch vier Integrale stehen vom Typus

$$J_{1-4} = \int d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e f^{(a)}(\mathfrak{R}_a) f^{(e)}(\mathfrak{R}_e) e^{-(A \cdot \mathfrak{R}^2 + B \cdot \mathfrak{R}_e^2 + 2C \mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e)}. \quad (74)$$

In diesen Integralen kann zunächst die Integration über die Winkel ebenfalls ausgeführt werden ohne Kenntnis der Funktionen $f^{(a)}$ und $f^{(e)}$. Sodann sind die bekannten Reihenentwicklungen für diese Funktionen einzuführen. Die Integrationen können dann sämtlich elementar ausgeführt werden; die ziemlich komplizierten Schlußformeln, die sich so ergeben, sollen nicht ausführlich hingeschrieben werden. Die Rechnung wurde durchgeführt für die Energie $E_0 = 100$ kV; sie ist nahezu unabhängig davon, ob man die Energie um einige 100 kV verändert. Man erhält schließlich bei Normierung der Eigenfunktionen nach (69), wobei jetzt $d\tau$ das Volumenelement in den Integrationskoordinaten, also $d\mathfrak{s} dr d\mathfrak{R}_a d\mathfrak{R}_e$ bedeutet, das Resultat:

$$H_{ae} = -0.301 A N N'. \quad (75)$$

Das gilt unter der Voraussetzung, daß die Normierung von f_0 im Anfangs- und Endzustand jeweils auf die Amplitude 1 für große R geschieht.

Nun müssen die Funktionen aber so normiert sein, daß q_{12} und q_4 asymptotisch in ebene Wellen übergehen, wenn der Abstand der stoßenden Teilchen groß ist. Daher geht

$$f^{(a)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot e^{i\mathfrak{R}_a} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{\sin k R_a}{k R_a} + \dots \right),$$

also

$$f_0^{(a)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\sin k R_a}{k}.$$

An Stelle des Normierungsfaktors N muß also treten $\frac{1}{k\sqrt{V}} \cdot N$, entsprechend an Stelle von N' der Faktor $\frac{1}{k'\sqrt{V}} N'$. Wir erhalten damit endgültig (wegen $0.301 A = 9.02$):

$$H_{ae} = - \frac{9.02}{V} \frac{N}{k} \frac{N'}{k'}. \quad (76)$$

Nach einer bekannten Formel findet man den Wirkungsquerschnitt aus dem Matrixelement wie folgt:

$$\Phi = \frac{2\pi}{h} \varrho_E \frac{V}{v_a} \frac{1}{9} |H_{ae}|^2. \quad (77)$$

Dabei ist $\frac{1}{9}$ der dem Singulettzustand entsprechende Gewichtungsfaktor, ϱ_E ist die Anzahl der möglichen Energieendzustände im Energieintervall 1, also die Dichte der möglichen Niveaus, in die das System übergehen kann. Ohne den Faktor V/v_a (Normierungsvolumen durch Geschwindigkeit im Anfangszustand) würde (77) die Wahrscheinlichkeit eines Überganges in der Zeiteinheit bedeuten; dieser Faktor macht daraus definitionsgemäß den Wirkungsquerschnitt. Die Dichte ϱ_E der Niveaus im Endzustand kann man berechnen aus

$$\varrho_E = \frac{4\pi p_e^2 dp_e V}{h^3 dE_e}, \quad (78)$$

wobei p_e der Impuls im Endzustand ist, also, da die reduzierte Masse aus Triton und Proton $= \frac{3}{4} M$ ist, $p_e^2 = \frac{3M}{2} E_e$. Es wird daher

$$\frac{p_e^2 dp_e}{dE_e} = \frac{1}{2} p_e \frac{d}{dE_e} (p_e^2) = \frac{3M}{4} p_e = \frac{3M}{4} \sqrt{\frac{3M}{2} E_e}.$$

Ferner ist $v_a = \sqrt{E_0/M}$, so daß man erhält

$$\varrho_E = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{V}{h^3} M \sqrt{\frac{3}{2} M E_e}$$

und

$$\Phi = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M^2 V^2}{h^4} \sqrt{\frac{E_e}{E_0}} |H_{ae}|^2. \quad (79)$$

Führt man endlich noch die Beziehung ein, $E_e = \frac{1}{2} E_0 + U$ ($U = 4.22$), so entsteht unter Benutzung von (76):

$$\Phi = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M^2}{h^4} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E_0 + U}{E_0}} \cdot 81.5 \cdot \left(\frac{N N'}{k k'} \right)^2 \quad (80)$$

oder numerisch in Einheiten von 10^{-26} cm^2 die Schlußformel für den Wirkungsquerschnitt:

$$\Phi = 1.083 \left(\frac{N}{k} \right)^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2} E_0 + 4.22}{E_0}}. \quad (81)$$

Dabei ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß N' und k' sicher nur wenig von der Energie E_0 abhängen und ihr Wert für 100 kV, der oben angegeben wurde, ein für allemal eingesetzt. Die ganze Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes rührt also von der Normierungskonstanten des Anfangszustandes her, sowie von dem Wurfelfaktor, der die einfache anschauliche Bedeutung hat: Je länger die beiden Teilchen beisammen sind, um so lieber werden sie miteinander reagieren.

8. Diskussion des $D + D$ -Wirkungsquerschnittes.

Die Schlußformel (81) ergibt mit den in Tabelle 3 zusammengestellten Werten von N/k die Wirkungsquerschnittskurve, die in Fig. 6 gezeichnet ist. Wir können das Ergebnis unserer Rechnung sowohl mit einer älteren Rechnung von Dolch vergleichen, also mit experimentellen Zahlen.

Die experimentellen Werte für die Wirkungsquerschnitte dieser Reaktion waren anfangs umstritten. Heute können wir mit Sicherheit ihre Größenordnung von einigen 10^{-26} cm^2 angeben. Die besten zur Zeit verfügbaren Werte scheinen Messungen von Ladenburg¹⁾ zu sein, und zwar folgende Zahlen: Für $E_0 = 0,1$: $\Phi = 2$, für $E_0 = 0,3$: $\Phi = 3$, sowie eine Messung von Fermi und Amaldi²⁾ für $E_0 = 0,7$: $\Phi = 13$ in Einheiten 10^{-26} cm^2 .

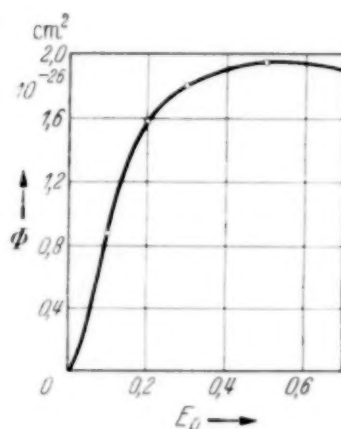


Fig. 6. Berechnete Wirkungsquerschnitte für die $D + D$ -Reaktion.

Das stimmt mit der von uns berechneten Größenordnung gut überein. Dagegen wird von unserer Rechnung in keiner Weise der schroffe Anstieg wiedergegeben, der zwischen 0,3 und 0,7 MV beobachtet wurde. Für seine Erklärung stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Entweder ist die Ursache die Umwandlung im P -Zustand oder ein dort liegendes Resonanzniveau, das dem angeregten α -Teilchen zugehört. Die Rechnung von Hylleraas³⁾ über die angeregten Zustände des α -Teilchens ergibt in der hierfür in Frage kommenden Zone einen S - und einen D -Zustand; doch scheint mir schwer abzusehen, in welchem Umfange aus den Hylleraas'schen Rechnungen bindende quantitative Schlüsse gezogen werden dürfen. Unsere Näherung gestattet ebenfalls keine Entscheidung dieser Frage.

¹⁾ R. Ladenburg u. M. H. Kanner, Phys. Rev. **52**, 911, 1937. —

²⁾ E. Fermi u. E. Amaldi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936. — ³⁾ E. Hylleraas, ZS. f. Phys. **107**, 258, 1937.

Messungen über die Richtungsverteilung bei höheren Energien als 200 kV könnten vielleicht Aufschluß hierüber geben.

Sehr interessant ist der Vergleich mit dem Ergebnis der Dolchschen¹⁾ Rechnung. Dolch setzt die Eigenfunktionen in ganz ähnlicher Weise an, wie es hier geschieht, löst aber die Schrödinger-Gleichung für die Relativbewegung der beiden Schwerpunkte zueinander nicht, sondern führt hier einfach als Näherung eine ebene Welle ein, deren Amplitude er durch Hinzufügung eines Gamow-Faktors \sqrt{G} im Anfangszustand verringert. Damit ergeben sich Wirkungsquerschnitte, die um mehr als vier Zehnerpotenzen höher liegen als die von uns berechneten.

Zur Erklärung dieses Versagens der Dolchschen Näherung haben wir vor allem zwei Effekte zu beachten:

1. *Wellenlängeneffekt*: Für etwa $R < 1$ bewegen sich die beiden Deuteronen in einem Gebiet starker gegenseitiger Anziehung. Sie stürzen daher, sobald sie sich soweit genähert haben, mit erhöhter Geschwindigkeit aufeinander zu: Die Wellenlänge in diesem Bereich ist verkürzt. Im Anfangszustand ist nun wegen der Kleinheit der kinetischen Stoßenergie gegenüber den Kernenergien die Wellenlänge weit außen sehr groß gegen Kerndimensionen; im Innenraum wird sie etwa $= 2$ Elektronenradien. Diese Wellenlängenverkürzung ist bei Dolch außer acht gelassen; er rechnet auch für kleine R mit der Eigenfunktion großer Wellenlänge. Zeichnen wir die Funktion $f(R) = \frac{1}{R} f_0(R)$ auf, so erhalten wir, wenn wir zunächst auf gleiche Amplitude 1 an der Stelle $R = 0$ normieren, das Bild der Fig. 7. Die Werte der Eigenfunktion sind durchweg verkleinert; in einigen Gebieten ist die Eigenfunktion sogar negativ, so daß sich bei der Bildung des Integrals H_{ae} einige Teile gegenseitig weginterferieren. Im Endzustand ist der Unterschied natürlich lange nicht so beträchtlich, aber immerhin noch deutlich merkbar. Insgesamt ergibt sich hieraus eine Verkleinerung des Matrixelements H_{ae} um rund den Faktor 10, also des Wirkungsquerschnittes um den Faktor 100 gegenüber der Dolchschen Rechnung.

2. *Amplitudeneffekt*. Tabelle 3 zeigt, daß an Stelle der von Dolch benutzten Amplitude \sqrt{G} im Anfangszustand das viel kleinere N tritt. Für 100 kV wird dadurch der Wirkungsquerschnitt weiter um den Faktor

$$N^2/G = (0,0473/0,218)^2 = 1/21,3$$

verkleinert. Im Endzustand ist dieser Effekt viel weniger ausgeprägt, ergibt aber immer noch den Faktor 1,6. Damit wird eine Verkleinerung

¹⁾ H. Dolch, ZS. f. Phys. **100**, 401, 1936.

gegenüber dem Dolchschen Wirkungsquerschnitt um rund den Faktor 3000 erhalten. Daß der Unterschied in Wahrheit noch rund eine Zehnerpotenz mehr ausmacht, hat seine Ursache teils in dem Gewichtungsfaktor $1/9$, teils in den Unterschieden im Kraftansatz.

Der Amplitudeneffekt ist anschaulich leicht zu verstehen. Auch er tritt ganz generell in jedem anziehenden Potentialfeld ein. Als Beispiel betrachten wir ein „Kastenpotential“ Fig. 8. Darunter gezeichnet ist die

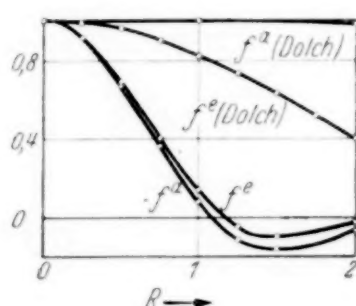


Fig. 7. Eigenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes nach unserer Rechnung und in der Näherung von Dolch. Normierung willkürlich.

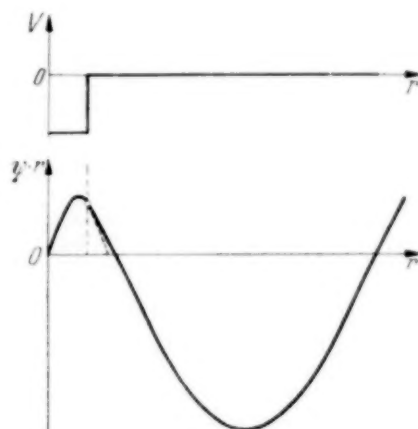


Fig. 8. „Wellenlängeneffekt“ und „Amplitudeneffekt“ im Spezialfall des Kastenpotentials.

ψ -Funktion für ein Energieniveau E_0 . Man sieht anschaulich, wie mit dem Wellenlängenverkürzungseffekt Hand in Hand eine Amplitudenverkleinerung im Innengebiet geht, verglichen mit dem Außengebiet. Nur wenn die Eigenfunktion an der Anschlußstelle gerade zufällig horizontale Tangente hat, ist die Amplitude innen und außen die gleiche: Wir sprechen dann von Resonanz (*Einkörperresonanz!*). Die von uns berechneten Eigenfunktionen sind nicht genau genug, um entscheiden zu können, ob nicht eine Resonanz in diesem Sinne bei Energien um 700 kV herum auftritt und die Größe des experimentellen Querschnittes dort verständlich macht.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, physikalisch-radioaktive Abteilung, im Dezember 1937.

Über die wechselseitige Lichtanregung bei den Atomstößen He bzw. H auf Be, Mg, Ca, Sr, Ba.

Von **Karl Gailer** in Würzburg.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 17. Januar 1938.)

Mit Hilfe von Kanalstrahlen wird die gegenseitige Anregung von He- bzw. H-Atomen und den Atomen der Erdalkalien untersucht und das experimentelle Ergebnis unter dem Gesichtspunkt der bei der Wechselwirkung „übertragbaren Energie“ betrachtet.

A. Problemstellung.

Es gibt bis jetzt noch keine Theorie, welche über die Anregungsvorgänge bei Stößen von neutralen Atomen aufeinander befriedigende quantitative Aussagen machen kann. Infolge dieses Mangels kann daher eine weitgehendere Klärung über die wechselseitige Anregung bei Atomstößen wohl nur dadurch erreicht werden, daß eine größere Menge experimentell ermittelten Materials unter einem gewissen Gesichtspunkt betrachtet bzw. geordnet wird. Der erste Versuch in dieser Richtung wurde vor einiger Zeit von Döpel¹⁾ unternommen. Zur Ordnung der von ihm ausgeführten Stoßanregungsversuche stellte er ein als Arbeitshypothese gedachtes Stoßmodell auf, das den Vorteil einer großen Anschaulichkeit besitzt und sich für die Interpretation einer großen Zahl von Atomstoßprozessen gut bewährt hat. Nach diesem Stoßmodell ist die Wahrscheinlichkeit der Energieübertragung von einem beliebigen Stoßpartner auf einen anderen eine einheitliche Funktion der „übertragbaren Energie“; letztere setzt sich im allgemeinsten Fall aus zwei Teilen zusammen: Aus der Translationsenergie des Leuchtelektrons des stoßenden Atoms und einem Bruchteil der kinetischen Energie des Atomrumpfes des stoßenden Atoms, wobei dieser Bruchteil von den Massen und den Bindungsenergien der beiden jeweiligen Stoßpartner abhängt. Bedeutet also

m_1 die Masse des Leuchtelektrons des stoßenden Atoms,

M_1 die Masse des stoßenden Atoms,

M_2 die Masse des gestoßenen Atoms,

v die Relativgeschwindigkeit der beiden Stoßpartner,

E_1 die Anregungs- bzw. Ionisationsenergie des stoßenden Atoms,

E_2 die Anregungs- bzw. Ionisationsenergie des gestoßenen Atoms,

so wird die übertragbare Energie $W_{1 \rightarrow 2}$ dargestellt durch

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{m_1}{2} v^2 + k_{1 \rightarrow 2} \frac{M_1}{2} \cdot v^2, \quad (1)$$

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1933.

wobei $k_{1 \rightarrow 2} = f(E_1, E_2, M_1, M_2)$ und $k_{1 \rightarrow 2} \neq k_{2 \rightarrow 1}$. (2)

Dabei wird

$$k_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{für} \quad E_1 \ll E_2$$

bzw.

$$k_{1 \rightarrow 2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{für} \quad E_1 > E_2.$$

Die Funktion $W_{1 \rightarrow 2}$ geht also im Falle $E_1 \ll E_2$ in eine Geschwindigkeitsfunktion, im Falle $E_1 > E_2$ in eine Energiefunktion über. Für den Stoß von Elektronen auf Atome geht $W_{1 \rightarrow 2}$ über in die gesamte kinetische Energie des Elektrons. Für den Fall des Stoßes zweier Atome aufeinander, bei denen die Anregungs- bzw. Ionisationsenergie des stoßenden sehr klein gegenüber der des gestoßenen ist, ist für die übertragbare Energie praktisch nur das erste Glied von (1) maßgebend. In diesem Falle sollte also eine Anregung des Stoßpartners mit der größeren Anregungsenergie nur dann stattfinden, wenn das Glied $\frac{m_1}{2} v^2$ diese Anregungsenergie überschreitet.

Bei He-Atomen z. B. sollte das erst bei einer He-Beschleunigungsenergie der Fall sein, die rund dem 7400fachen der betreffenden Anregungsenergie ist. Unterhalb dieser Beschleunigungsspannung sollte in diesem Falle nur der Stoßpartner mit der geringeren Anregungsenergie angeregt werden. Man sollte daher beim Stoß zweier Partner mit sehr verschiedenen Anregungsenergien immer eine Spannungsgrenze finden, unterhalb welcher nur der Partner mit der kleineren Anregungsenergie angeregt wird, während der andere Partner nicht (oder nur wenig) angeregt wird, obgleich die Gesamtenergie des Stoßes weitaus hinreichen würde, um auch diesen anzuregen. Solche Anregungsenergieverhältnisse liegen vor beim Stoß von He- bzw. H-Atomen auf die Atome der Erdalkalimetalle. Es soll daher im Folgenden untersucht werden, ob jene Voraussage des Stoßmodells in den genannten Fällen erfüllt ist.

B. Stoßanregung zwischen He- bzw. H-Atomen und den Atomen der Erdalkalien.

I. Apparativer Teil.

Hochspannungsapparatur und Entladungsrohr zur Erzeugung der He¹⁾ bzw. H-Kanalstrahlen wurden an anderer Stelle bereits ausführlich

¹⁾ Das für die vorliegende Untersuchung benötigte, spektroskopisch besonders reine Helium wurde mir von der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche, insbesondere Herrn Dr. F. Pollitzer, dem Vorstand des physikalisch-chemischen Laboratoriums in Hölriegelskreuth.

beschrieben¹⁾. Der Beobachtung-raum für die wechselseitige Stoßanregung war im wesentlichen genau so beschaffen, wie dies für die Untersuchung beim Stoß $\text{He} \rightarrow \text{Mg}$ und $\text{H} \rightarrow \text{Mg}$ der Fall war²⁾. Nach Verlassen einer sogenannten Abklingkathode, wie man sie in der Wienschen Schule benutzte, treffen die Kanalstrahlen auf das zu untersuchende Erdalkalimetall auf, in dessen Dampfzone dann spektral beobachtet wird. Die spektrale Untersuchung erfolgte mit einem Glas- und einem Quarzspektrographen, über deren Öffnungsverhältnis und Dispersion ebenfalls bereits berichtet wurde²⁾. Um eine Anregung der Erdalkalien durch Elektronen, die vom Kanalstrahl aus der jeweils beschossenen Substanz ausgelöst werden, zu verhindern, konnte der aus Kupferblech bestehende, schalenförmig ausgebildete Substanzträger gegenüber seiner Umgebung bis zu 2000 Volt positiv aufgeladen werden. Die einzelnen untersuchten Substanzen waren: Be-Metall geraspelt, Be O, Ca-Metall geraspelt, Ca O, Sr O und Ba O.

Bei den verwendeten Spannungen (15 bis 30 kV Beschleunigungsspannung für die He-Atome und 10 bis 15 kV Beschleunigungsspannung für die H-Atome) bestehen die He- bzw. H-Kanalstrahlen zum weitaus größten Teil aus Atomen, die durch Neutralisation von Ionen nach der Beschleunigung entstanden sind; etwa nur 10% vom Gesamtkanalstrahl sind geladene Teilchen. Die Anregung durch die geladenen Teilchen des Kanalstrahls ist in diesem Spannungsbereich in allen untersuchten Fällen gegenüber der Anregung durch die neutralen Atome des Strahls zu vernachlässigen, so daß wir es bei der Anregung der Erdalkalien durch He- bzw. H-Kanalstrahlstoß praktisch nur mit der Anregung durch neutrale He- bzw. H-Atome zu tun haben.

II. Versuchsergebnisse und deren Interpretation mit Hilfe des Döpelschen Stoßmodells.

1a) Der Atomstoßprozeß $\text{He} \rightarrow \text{Be}$. α) Experimentelles Ergebnis. Die auf den einzelnen Spektrogrammen (Agfa-Isochromplatten) erhaltenen Linien sind in Tabelle 1 angeführt. Wir erhalten beim He-Kanalstrahlstoß auf Be nur eine Anregung des Be ohne gleichzeitige Anregung des He.

β) Diskussion des experimentellen Befundes. Das Leuchtelektron des Be ist nur mit 9,4 Volt gebunden, während die Bindungsenergie des He-Leuchtelektrons 24,47 Volt beträgt. Demnach ist das Be-Atom nicht in der Lage, auf das He-Atom eine Energie zu übertragen, die zur Anregung

¹⁾ K. Gailer, Ann. d. Phys. **24**, 421, 1935. — ²⁾ K. Gailer, ZS. f. Phys. **103**, 303, 1936.

(~ 20 Volt) des He ausreichen würde; denn ehe das Be-Atom 20 Volt auf das He übertragen kann, hat es infolge seiner kleinen Ionisationsspannung bereits sein Leuchtelektron verloren oder ist zum mindesten am He angeregt worden, während das He-Atom dabei unversehrt geblieben ist. D. h. Be-Atome sind in dem untersuchten Spannungsbereich (rund 20 kV Teilchen-spannung für die He-Atome) nicht in der Lage He-Atome anzuregen. Umgekehrt aber kann das He-Atom ohne weiteres die erforderliche Anregungs- bzw. Ionisationsenergie (9,4 Volt) auf das Be-Atom übertragen und dieses daher anregen bzw. ionisieren.

Tabelle 1. Anregung von Be durch He-Atome¹⁾.

λ in Å aus der Dispersionskurve	λ in Å aus Kayser's Tabellen	Termbezeichnung nach Grotrian und Paschen	Element
2347	2348,6	$2^1S - 2^1P$	Be I
2493	2494,5	$2^3P_0 - 3^3D$	Be I
	2494,5	$2^3P_1 - 3^3D$	
	2494,7	$2^3P_2 - 3^3D$	
	2650,7	$2s\ 2p\ ^3P_2 - 2p\ 2p\ ^3P_1$	
2650	2650,7	$2s\ 2p\ ^3P_1 - 2p\ 2p\ ^3P_0$	Be I
	2650,6	$2s\ 2p\ ^3P_2 - 2p\ 2p\ ^3P_2$	
	2650,6	$2s\ 2p\ ^3P_1 - 2p\ 2p\ ^3P_1$	
	2650,5	$2s\ 2p\ ^3P_0 - 2p\ 2p\ ^3P_1$	
	2650,4	$2s\ 2p\ ^3P_1 - 2p\ 2p\ ^3P_2$	
	3130,4	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$	
3129	3131,0	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$	Be II
	3321,0	$2^3P_0 - 3^3S$	
3323	3321,0	$2^3P_1 - 3^3S$	Be I
	3321,3	$2^3P_2 - 3^3S$	
4571	4572,6	$2^1P - 3^1D$	Be I

Wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist, treten bei dem Stoßprozeß $\text{He} \rightarrow \text{Be}$ außer den Be I-Linien auch noch die beiden Resonanzlinien des Be II ($1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ und $1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$) in unseren Spektrogrammen auf. Auch diese Tatsache läßt sich mit unserer Stoßvorstellung erklären: Die Anregungsenergie des 2^2P -Terms vom Be II beträgt nahezu 3,9 Volt.

¹⁾ Bei sehr langen Belichtungszeiten (6 Stunden und mehr) treten außer den in der Tabelle angeführten Be-Linien auch noch die He-Linien $\lambda = 3888$ und $\lambda = 4471$ ganz schwach auf, während dann die Be-Linien bereits mehrfach überbelichtet sind. Ebenso erscheinen beim Stoßprozeß $\text{H} \rightarrow \text{Be}$ bei sehr langen Belichtungszeiten und mehrfacher Überbelichtung der Be-Linien die Linien H_β und H_γ . Dies hat, wie durch Kontrollaufnahmen gezeigt wurde, seinen Grund darin, daß aus dem Entladungsrohr He bzw. H in den Beobachtungsraum diffundiert (He- bzw. H-Restdruck im Beobachtungsraum $\sim 1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg) und dort von dem He- bzw. H-Kanalstrahl angeregt wird.

Demnach muß das He-Atom eine Energie von rund $9,4 + 3,9 = 13,3$ Volt übertragen, was ihm auf Grund der großen Bindungsenergie seines Leuchtelektrons durchaus möglich ist, ohne dabei selbst angeregt zu werden.

1b) Der Atomstoßprozeß $H \rightarrow Be$. α) Experimentelles Ergebnis. Die Spektrogramme weisen (außer den bei langen Belichtungszeiten schwach auftretenden H-Linien H_β und H_γ) dieselben Be-Linien auf wie sie beim Stoß $He \rightarrow Be$ erhalten wurden (vgl. Tabelle 1), so daß wir also auch in diesem Falle praktisch nur eine Anregung des einen Stoßpartners, des Be, ohne gleichzeitige Anregung des anderen Stoßpartners, des H, erhalten.

β) Diskussion des experimentellen Befundes. Genau dieselbe Überlegung wie im Falle des Stoßes $He \rightarrow Be$ läßt sich auch für den Stoßvorgang $H \rightarrow Be$ anstellen: wobei jetzt das Leuchtelektron des H mit 13,5 Volt die größere Bindungsenergie gegenüber dem mit 9,4 Volt gebundenen Be-Valenzelektron besitzt und daher das Be anregen oder ionisieren kann, ohne dabei selbst angeregt zu werden, während umgekehrt das Be-Atom, ehe es eine für die Anregung der Balmerserie (12 Volt für H_α) nötige Energie auf das H-Atom übertragen kann, bereits am H angeregt oder sogar ionisiert wird.

Für die Anregung des beim Stoß $H \rightarrow Be$ beobachteten 2^2P -Terms des Be II ist eine Energie von rund $9,4 + 3,9 = 13,3$ Volt (Ionisationsenergie des Be I + Anregungsenergie des Be II- 2^3P -Terms) nötig. Diese Energie kann das H-Atom übertragen: denn da das Glied $\frac{m}{2} v^2$ [siehe Gleichung (1)] bei 10 kV Beschleunigungsspannung für die H-Atome bereits rund 5 Volt Energie übertragen kann, so braucht der Atomrumpf [also in Gleichung (1) das Glied $k_{1 \rightarrow 2} \frac{M_1}{2} v^2$] nur noch eine Energie von etwa 8,3 Volt aufzubringen, was durchaus möglich ist, ohne daß dabei das H-Atom selbst in der Balmerserie angeregt wird.

2. Der Atomstoß $He \rightarrow Mg$ und $H \rightarrow Mg$. Über diesen Stoßprozeß wurde bereits ausführlich berichtet¹⁾. Es sei hier nur kurz nochmals erwähnt, daß nur eine Mg-Anregung stattfindet ohne gleichzeitige Anregung des He bzw. H.

3a) Der Atomstoßprozeß $He \rightarrow Ca$. α) Experimentelles Ergebnis. Die Spektrogramme enthalten die in Tabelle 2 aufgeführten Linien. Auch bei diesem Stoßprozeß wird nur der eine Stoßpartner, nämlich Ca, angeregt

¹⁾ K. Gailer, ZS. f. Phys. **103**, 303, 1936.

und der andere nicht, nämlich He. In Fig. 1 ist als Beispiel ein Spektrum wiedergegeben (Agfa Isochrom Platte, Belichtungszeit 7 Stunden, Beschleunigungsspannung für die He-Atome 30 kV). Die am He-Restdruck im Beobachtungs-raum schwach angeregte He-Linie $\lambda = 3888$ (schwächste

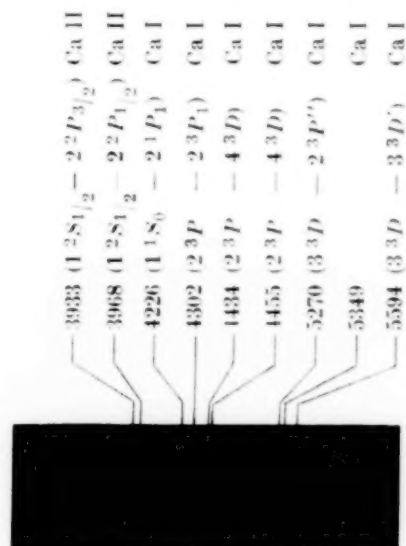


Fig. 1. Wechselseitige Anregung zwischen He- und Ca-Atomen. Es erfolgt nur eine Anregung des Ca ohne gleichzeitige Anregung des He, obgleich die Gesamtenergie des Stoßes ausreichen würde, um beide Stoßpartner anzuregen.

Linie auf dem Spektrogramm!) ist natürlich in der Reproduktion überhaupt nicht mehr erkennbar, da ja schon weitaus stärkere Ca-Linien in der Reproduktion nicht mehr erscheinen.

β) Diskussion des experimentellen Befundes. Die Bindungsenergie des Ca-Valenzelektrons beträgt 6,08 Volt; die des He-Valenzelektrons 24,47 Volt. Bevor also das Ca-Atom auf das He-Atom eine zur Anregung des He nötige Energie von mindestens 20 Volt übertragen kann, hat es infolge der kleinen Bindungsenergie seines Valenzelektrons dieses bereits verloren (Ionisation!) oder ist am He angeregt worden, während das He-Atom unversehrt geblieben ist. D. h. Ca-Atome können in dem untersuchten Spannungsbereich He-Atome nicht anregen. Dagegen ist umgekehrt das He-Atom ohne weiteres imstande, die erforderliche Anregungs- (1,9 Volt) bzw. Ionisationsenergie (6,08 Volt) auf das Ca zu übertragen und dieses daher anzuregen bzw. zu ionisieren.

Das Auftreten der Ca II-Linien beim Stoß $\text{He} \rightarrow \text{Ca}$ (vgl. Tabelle 2) vereinbart sich ebenfalls mit unserer Stoßvorstellung. Die Anregungsenergie für den höchsten beobachteten Ca II-Term ($4^2D_{5/2}$) beträgt rund 7 Volt. Das He-Atom muß also eine Energie von rund $6 + 7 = 13$ Volt (Ionisationsenergie des Ca I + Anregungsenergie des $4^2D_{5/2}$ -Terms vom

Ca II) übertragen, was ihm auf Grund der großen Bindungsenergie seines Valenzelektrons durchaus möglich ist, ohne dabei selbst angeregt zu werden.

Bemerkenswert ist ferner die Tatsache, daß die Ca I-Interkombinationsresonanzlinie $\lambda = 6572,7$ ($1^1S_0 - 2^3P_1$) nicht beobachtet wurde, trotzdem mit Agfa Infrarot Platten danach gesucht wurde und obgleich die den Term 2^3P_1 auffüllenden Ca-Linien $\lambda = 4435,6$ und $4434,9$ ($2^3P_1 - 4^3D_{1,2}$) und $\lambda = 3630$ ($2^3P_1 - 5^3D_{1,2}$) auf den Spektrogrammen stark auftreten. Diese Tatsache spricht demnach nicht gegen eine Anregung der Linie $\lambda = 6572$ durch direkten Stoß von unten her, vielmehr wird dadurch bestätigt, daß der Ca-Term 2^3S_1 eine viel zu lange Lebensdauer ($\tau = 5,2 \cdot 10^{-4}$ sec) besitzt, um die bei dem Übergang $2^3P_1 - 1^1S_0$ frei werdende

Tabelle 2. Anregung von Ca durch He-Atom¹⁾.

λ in Å aus der Dispersionskurve	λ in Å aus Kayzers Tabellen	Termbezeichnung nach Grotrian	Element
3178	3179,3	$2^2P_{3/2} - 4^2D_{5/2}$	Ca II
3630	3630,7 3630,9	$2^3P - 5^3D$	Ca I
3642	3644,3 3644,7 3644,9		Ca I
3933	3933,6	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$	Ca II
3968	3968,4	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$	Ca II
4226	4226,7	$1^1S_0 - 2^1P_1$	Ca I
4284	4283,0	$2^3P - 2^3P'$	Ca I
4290	4289,3	anomales Triplet	Ca I
4302	4302,5		Ca I
4308	4307,7		Ca I
4319	4318,6		Ca I
4426	4425,4		Ca I
4435	4434,9		Ca I
4437	4435,6	$2^3P - 4^3D$	Ca I
4455	4454,7 4455,8		Ca I
4458	4456,6		Ca I
4578	4578,5	$3^3D_1 - 4^3F$	Ca I
4582	4581,4	$3^3D_2 - 4^3F$	Ca I
5264	5264,2 5265,5	$3^3D - 2^3P''$	Ca I
5270	5270,2		Ca I
5350	5349,4		Ca I
5595	5594,6		Ca I
5602	5601,2 5602,8	$3^3D - 3^3D'$	Ca I

¹⁾ Auch hier gilt das in der Fußnote zu Tabelle 1 Gesagte.

Energie ungestört als $h \cdot \nu$ ausstrahlen zu können, sondern sie wohl in Form eines „Stoßes zweiter Art“ an die Gefäßwände abgibt.

3b) *Der Atomstoßprozeß $H \rightarrow Ca$. α) Experimentelles Ergebnis.* Bei diesem Stoßprozeß ergeben die Spektrogramme im wesentlichen dieselben Linien wie beim Stoß $He \rightarrow Ca$ (vgl. Tabelle 2); jedoch fehlt hier auf allen Spektrogrammen die Ca II-Linie $\lambda = 3179,3$ ($2^2P_{3/2} - 4^2D_{5/2}$). Es wird also nur das Ca angeregt ohne gleichzeitige Anregung des H.

β) *Diskussion des experimentellen Befundes.* Für den Stoßvorgang $H \rightarrow Ca$ gilt dieselbe Überlegung wie für den Stoßprozeß $He \rightarrow Ca$: Das H-Atom mit seinem mit 13,5 Volt gebundenen Leuchtelektron kann ohne weiteres die zur Anregung (1,9 Volt) bzw. Ionisation (6,08 Volt) nötige Energie übertragen; dagegen wird das Ca-Atom, ehe es die zur Anregung des H nötige Energie (12 Volt für H_α) übertragen kann, bereits am H angeregt oder ionisiert. *Ca-Atome können also H-Atome in unserem Spannungsbereich nicht anregen.*

Beim Stoß $H \rightarrow Ca$ wird, wie bereits oben erwähnt, die Ca II-Linie $\lambda = 3179,3$ ($2^2P_{3/2} - 4^2D_{5/2}$) nicht angeregt, sondern nur die beiden Ca II-Resonanzlinien $\lambda = 3933,6$ ($1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$) und $\lambda = 3968,4$ ($1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$), so daß also der Term 2^2P der höchstangeregte Ca II-Term ist. Seine Anregungsenergie beträgt etwa 3 Volt. Das H-Atom muß somit eine Energie von rund $6 + 3 = 9$ Volt (Ionisationsenergie des Ca I + Anregungsenergie des Ca II- 2^3P -Terms) auf das Ca übertragen, was ihm, ohne dabei selbst (in der Balmerreihe) angeregt zu werden, möglich ist.

4a) *Der Atomstoßprozeß $He \rightarrow Sr$. α) Experimentelles Ergebnis.* In Tabelle 3 sind die auf den Spektrogrammen erhaltenen Sr-Linien wiedergegeben. Es erfolgt nur eine Anregung des Sr ohne gleichzeitige Anregung des He. Außer den in Tabelle 3 angeführten Linien tritt bei sehr langen Belichtungszeiten (neben einigen am He-Restdruck im Beobachtungsraum schwach angeregten He-Linien) auch noch schwach H_β auf; ein Zeichen dafür, daß das verwendete SrO-Präparat spektroskopisch nicht ganz rein war und spurenweise SrH_2 enthielt.

β) *Diskussion des experimentellen Befundes.* Das Sr-Leuchtelektron ist mit 5,67 Volt gebunden. Ehe daher das Sr-Atom auf das He-Atom die zur Anregung des He nötige Energie von etwa 20 Volt übertragen kann, hat es zufolge seiner kleinen Bindungsenergie bereits sein Leuchtelektron ganz verloren oder ist wenigstens am He-Atom angeregt worden, während das He-Atom bei diesem Zusammenstoß unversehrt geblieben ist. *Daher können Sr-Atome in unserem Spannungsbereich He-Atome nicht anregen.* Andererseits kann das He-Atom mit seinem mit 24,47 Volt gebundenen

Valenzelektron ohne weiteres die erforderliche Anregungs- (1,8 Volt) bzw. Ionisationsenergie (5,67 Volt) auf das Sr-Atom übertragen und dieses anregen oder ionisieren.

Bei diesem Stoßprozeß treten ferner noch die Sr II-Resonanzlinien $\lambda = 4077,7$ ($1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$) und $\lambda = 4215,5$ ($1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$) auf. Für die Anregung des 2^2P -Terms vom Sr II sind rund 3 Volt nötig, so daß das He-Atom dafür eine Gesamtenergie von rund $5,7 + 3 = 8,7$ Volt übertragen muß, was ihm durchaus möglich ist, ohne dabei selbst angeregt zu werden.

4 b) *Der Atomstoßprozeß $H \rightarrow Sr$. α) Experimentelles Ergebnis.* Außer den in Tabelle 3 aufgeführten Spektrallinien treten hier auch noch die H-Linien H_β und H_γ auf, und zwar mit einer allerdings nur wenig größeren Intensität als der bloßen Anregung des H an dem im Beobachtungsraum herrschenden, aus dem Entladungsraum herunter diffundierenden H-Restdruck ($1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg) entsprechen würde. Obgleich die Intensität der Sr-Anregung größenordnungsmäßig die Intensität der H-Anregung übersteigt, könnte durch das Auftreten der Balmerreihe des Wasserstoffs der Eindruck erweckt werden, als ob H-Atome durch Sr-Atome angeregt würden. Nun wurde aber unter 4a bereits gezeigt, daß auch im Fall des Stoßes $He \rightarrow Sr$ die Balmerreihe des H auftritt; daraus geht eindeutig hervor, daß das verwendete Sr-Präparat Wasserstoffverbindungen enthielt. (Bekanntlich haben die Erdalkalien mit steigender Ordnungszahl eine zunehmende Tendenz zur Hydridbildung.) Wir haben somit eine H-Anregung an dem aus dem im Sr-Präparat enthaltenen SrH_2 beim Auftreffen der H-Kanalstrahlen frei werdenden H. Die Intensität dieser H-Anregung können wir ungefähr aus den Anregungsintensitäten der Balmerreihe beim Stoß $He \rightarrow Sr$ abschätzen.

Durch diesen Anregungsprozeß und die oben erwähnte Anregung am Restwasserstoff im Beobachtungsraum wird die beobachtete Intensität der H-Anregung gedeckt. Wir haben somit das Resultat, daß beim Stoßprozeß $H \rightarrow Sr$ nur eine Anregung des Sr ohne gleichzeitige Anregung des H am Sr stattfindet.

β) *Diskussion des experimentellen Befundes.* Infolge der großen Bindungsenergie (13,5 Volt) seines Leuchtelektrons kann das H-Atom auf das Sr-Atom eine zur Anregung (1,8 Volt) oder Ionisation (5,67 Volt) des letzteren nötige Energie übertragen, ohne dabei selbst angeregt zu werden. Das Sr-Atom seinerseits kann jedoch nicht die für das H-Atom nötige Anregungsenergie (12 Volt für H_α) übertragen, da es bereits vorher sein Leuchtelektron verliert oder am H angeregt wird. *Sr-Atome können also*

Tabelle 3. Anregung von Sr durch He-Atome¹⁾.

λ in Å aus der Dispersionskurve	λ in Å aus Kayser's Tabellen	Termbezeichnung nach Grotrian	Element
4079	4077,7	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$	Sr II
4217	4215,5	$1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$	Sr II
4607	4607,3	$1^1S_0 - 2^1P_1$	Sr I
4721	4722,2	$2^3P - 2^3P'$	Sr I
4742	4741,9		Sr I
4813	4811,8		Sr I
4832	4832,0	$2^3P_0 - 4^3D_1$	Sr I
4874	4872,4	$2^3P_1 - 4^3D_2$	} Sr I
	4876,0	$2^3P_1 - 4^3D_1$	
4961	4962,2	$2^3P_2 - 4^3D_3$	Sr I
5481	5480,8	$3^3D - 3^3D'$	Sr I
5504	5504,2		Sr I
5521	5521,7		Sr I
5540	5540,0		Sr I

in unserem Spannungsbereich H-Atome nicht anregen. Für die Anregung der beiden Sr II-Resonanzlinien hat das H-Atom eine Energie von rund $5,7 + 3$ Volt zu übertragen, was ihm ebenfalls möglich ist, ohne dabei selbst in der Balmerreihe angeregt zu werden.

5a) Der Stoßprozeß $\text{He} \rightarrow \text{Ba}$. *a) Experimentelles Ergebnis.* Da bei Ba die Tendenz zur Hydridbildung noch weit größer ist als bei Sr (vgl. das unter 4a Gesagte), so ist beim Stoß von He und H auf Ba die Möglichkeit zu entscheiden, ob nur Ba oder auch He bzw. H angeregt wird, stark vermindert; denn bei einem großen H-Gehalt des Ba-Präparats können natürlich He bzw. H an dem aus dem Präparat frei werdenden H angeregt werden. In der Tat erscheinen außer den in Tabelle 4 angeführten Ba-Linien auf den Spektrogrammen auch noch die H-Linien H_β und H_γ mit einer Intensität, die durchaus der Intensität starker Ba-Linien gleichkommt (z. B. Intensität von $H_\beta \approx$ Intensität von $\lambda_{\text{Ba}} = 5519$). Das verwendete BaO war also mit BaH_2 verunreinigt, woraus durch die Einwirkung der He-Kanalstrahlen H_2 frei wurde, das vom He angeregt wurde. Da aber — wie von R. Döpel²⁾ gezeigt wurde — bei den benutzten Spannungen umgekehrt auch das He am H angeregt wird, so darf es uns nicht überraschen, daß auf unseren Spektrogrammen die He-Linien $\lambda = 5015$, $\lambda = 4471$, $\lambda = 4026$ und $\lambda = 3888$ auftreten. Die Intensität der He-Linien ist von derselben Größenordnung wie die der H-Linien. Sie kann weitgehend durch die Anregung des He am H, sowie durch die Anregung am He, das vom Ent-

¹⁾ Auch hier gilt das in der Fußnote zu Tabelle 1 Gesagte. — ²⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1933.

Tabelle 4. Anregung von Ba durch He-Atome.

λ in Å aus der Dispersionskurve	λ in Å aus Kayser's Tabellen	Termbezeichnung nach Grotrian	Element
3993	3993,4 3995,6 3997,9	$3^3D_3-4^3F$	Ba I
4132	4130,6	$2^2P_{3/2}-4^2D_{5/2}$	Ba II
4282	4283,1		Ba I
4553	4554,0	$1^2S_{1/2}-2^2P_{3/2}$	Ba II
	4555,2	3^3D-3^3P	Ba I
4574	4573,8		Ba
4599	4599,7		Ba
4623	4619,9	$2^3P_0-3^3S_1$	Ba I
	4629,6	3^3D-3^3P	
4672	4674,9	3^3D-3^3P	Ba I
4932	4934,0	$1^2S_{1/2}-2^2P_{1/2}$	Ba II
5424	5425,5	$2^3P_0-4^3D_1$	Ba I
5520	5519,1	$2^3P_1-4^3D_2$	Ba I
5536	5535,5	$1^1S_0-2^1P_1$	Ba I
	5535,9	$2^3P_1-4^3D_1$	

ladungsraum in den Beobachtungsraum diffundiert, gedeckt werden. Dies läßt wohl den Schluß zu, daß auch im Falle des Atomstoßprozesses $\text{He} \rightarrow \text{Ba}$ (bei rund 20 kV Beschleunigungsspannung für die He-Atome) nur der eine Stoßpartner, nämlich Ba, angeregt wird, ohne daß praktisch gleichzeitig eine Anregung des anderen Partners, des He, erfolgt.

β) Diskussion des experimentellen Befundes. Das Ba-Atom mit seinem mit 5,19 Volt gebundenen Leuchtelektron wird, bevor es die zur He-Anregung nötige Mindestenergie (~ 20 Volt) übertragen kann, sein Leuchtelektron verlieren oder am He-Atom angeregt. Das He-Atom seinerseits kann, ohne dabei selbst angeregt zu werden, auf das Ba-Atom die zu dessen Anregung (1,56 Volt) oder Ionisation (5,19 Volt) nötige Energie übertragen; d. h. Ba-Atome können He-Atome in unserem Spannungsbereich nicht anregen. Ebenso kann das He-Atom die zur Anregung der beobachteten Ba II-Linien nötige Energie übertragen; denn der höchste beobachtete Ba II-Term $4^2D_{5/2}$ für die Ba II-Linie $\lambda = 4130$ ($2^3P_{3/2}-4^2D_{5/2}$) benötigt eine Energie von etwa 5,9 Volt, sodaß das He-Atom nur insgesamt rund $5,2 + 5,9 = 11,1$ Volt aufbringen muß, was ihm ohne weiteres möglich ist, ohne dabei selbst angeregt zu werden.

5b) Der Atomstoßprozeß $\text{H} \rightarrow \text{Ba}$. Infolge der bereits erwähnten Verunreinigung des BaO-Präparats mit BaH_2 und in Anbetracht der starken Tendenz des Ba zur Hydridbildung wurde von einem experimentellen Entscheid über die wechselseitige Anregung bei diesem Stoßprozeß ab-

gesehen. Auf Grund unserer Stoßvorstellung dürfte beim Stoßprozeß $H \rightarrow Ba$ in einem Spannungsbereich bis zu etwa 20 kV Beschleunigungsspannung nur eine Anregung des Ba stattfinden — ohne gleichzeitige Anregung des H in der Balmerreihe.

C. Zusammenfassung.

1. Mit Hilfe von He- und H-Kanalstrahlen wird die gegenseitige Anregung zwischen den Atomen der Erdalkalimetalle und He- bzw. H-Atomen untersucht. Dabei kommt man zu dem Schluß, daß nur eine Anregung der Erdalkalien erfolgt (Bogen und Funkenlinien) ohne gleichzeitige Anregung der He- bzw. H-Atome, obgleich die kinetische Energie der jeweiligen Stoßpartner die Anregungsenergie des He bzw. H weit übersteigt.

2. Das experimentelle Ergebnis wird mit Hilfe eines von R. Döpel aufgestellten Stoßmodells diskutiert. Es zeigt sich, daß in allen untersuchten Fällen diese Stoßvorstellung zu Aussagen führt, die dem experimentellen Befund vollauf gerecht werden.

3. Über die aus dieser Untersuchung sich ergebenden Fragen bezüglich der Gültigkeit des Elektronenspinerhaltungssatzes, wird an anderer Stelle ausführlich berichtet werden.

Herrn Prof. Dr. F. Harms, in dessen Institut die vorliegende Untersuchung ausgeführt wurde, sage ich für sein freundliches Interesse und seine bereitwilligste Unterstützung mit den Institutshilfsmitteln meinen besten Dank. Herrn Privatdozent Dr. R. Döpel danke ich herzlich für mannigfache kritische Ratschläge.

Würzburg, Physikalisches Institut, im August 1937.

Versuche zur Nath-Muellerschen Theorie der Beugung von Licht an schwingenden Festkörpern.

Von **E. Hiedemann** in Köln.

(Eingegangen am 4. Februar 1938.)

Die Nath-Muellersche Theorie¹⁾ der Beugung von Licht an schwingenden Gläsern erklärt eine bisher nur experimentell²⁾ gefundene Beugungserscheinung und beweist die Richtigkeit der von Hiedemann und Hoesch³⁾ angegebenen Methode der spannungsoptischen Analyse elastischer Schwingungen von Festkörpern. Einige neue Voraussagen der Nath-Muellerschen Theorie wurden experimentell bestätigt und führen zu einer neuen Methode der Messung elasto-optischer Konstanten von Gläsern, sowie zu der Messung der Schallintensität in diesen. — Es wird anschließend auf die Möglichkeit einer Erweiterung der Brillouinschen Theorie⁴⁾ der Streuung von Licht an Festkörpern hingewiesen, die zur Folge haben würde, daß eine Spektrallinie bei der Streuung an einem Festkörper in zwei Dublette und bei der Streuung an einer Flüssigkeit in ein Triplett aufgespalten werden sollte.

Um über die Intensitätsverhältnisse bei der Beugung von Licht an schwingenden Festkörpern Aufschluß zu erhalten, hat Mueller⁵⁾ kürzlich die Raman-Nathsche Theorie⁶⁾ der Beugung von Licht an Ultraschallwellen auf Festkörper ausgedehnt unter Berücksichtigung der in diesen auftretenden photoelastischen Effekte. Diese Theorie wurde in den letzten Monaten von N. S. Nagendra Nath und Mueller weiter ausgebaut und gleichzeitig im Laboratorium des Verfassers experimentell geprüft. Da die Grundgedanken der Theorie schon an anderer Stelle kurz skizziert worden sind, soll jetzt auch über die wichtigsten Ergebnisse der experimentellen Prüfung in aller Kürze Bericht erstattet werden⁷⁾.

Bekanntlich haben Hiedemann und Hoesch²⁾ gezeigt, daß es möglich ist, mit polarisiertem Licht eine Beugungserscheinung an transversalen Anteilen elastischer Wellen zu erhalten, die sich grundsätzlich von der-

¹⁾ N. S. Nagendra Nath und Hans Mueller, *Nature* **141**, 37, 1938. —
²⁾ E. Hiedemann und K. H. Hoesch, *Naturwiss.* **23**, 705, 1935; **24**, 60, 1936. —
³⁾ E. Hiedemann und K. H. Hoesch, *ZS. f. Phys.* **98**, 141, 1935. — ⁴⁾ L. Brillouin, *Ann. de Phys.* **17**, 88, 1921. — ⁵⁾ Hans Mueller, *Phys. Rev.* **52**, 223, 1937. — ⁶⁾ C. V. Raman u. N. S. Nagendra Nath, *Proc. Indian Acad. Sci.* **2**, 406 u. 413, 1935; **3**, 75, 119 u. 459, 1936. — ⁷⁾ Über die experimentelle Prüfung der Nath-Muellerschen Theorie wurde zuerst in einem Vortrag des Verf. vor der Ortsgruppe Dresden der deutschen Gesellschaft für technische Physik am 14. Januar 1938 berichtet.

jenigen an longitudinalen Wellen unterscheidet. Durchsetzt nämlich linear polarisiertes Licht, dessen Polarisationsrichtung parallel oder senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Schubwellen ist, einen Glaskörper und beobachtet man durch einen Analysator Nicol, der zum Polarisator gekreuzt ist, so tritt keine Beugung an longitudinalen Wellen in Erscheinung, sondern nur eine Beugung an den transversalen Wellen, die aus den \pm ersten Ordnungen besteht. (Hierbei ist vorausgesetzt, daß die experimentellen Bedingungen so gewählt werden, daß nur Schallwellen angeregt sind, die in derselben Richtung wie die Schubwellen oder senkrecht dazu sich fortpflanzen.) Nach Mueller¹⁾ bewirkt nun eine Transversalwelle, deren Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtung senkrecht zum Lichtstrahl ist, einen photoelastischen (spannungsoptischen) Effekt, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die Brechungsindizes in der zum Lichtstrahl senkrechten Ebene auch in einem Glaskörper nicht mehr durch einen Kreis dargestellt werden können (isotropes Medium), sondern durch eine Ellipse, deren Achsen unter 45° zur Fortpflanzungsrichtung der Schubwellen liegen. Die Hauptbrechungsindizes (dargestellt durch die Endpunkte der Achsen der Ellipse) erleiden Schwankungen $+\mu$ und $-\mu$ von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Phase. Hierdurch wird das eintretende Licht in zwei parallel den Achsen der Brechungsindexellipse polarisierte Komponenten zerlegt. Ist das einfallende Licht parallel zur Fortpflanzungsrichtung der Schubwellen polarisiert, so bestehen nach Nath und Mueller die n -ten Beugungsordnungen aus Komponenten der Größen: $J_n(2\pi\mu L/\lambda)$ und $J_n(-2\pi\mu L/\lambda)$, worin J_n die Besselsche Funktion n -ter Ordnung, L den Lichtweg im Schallfeld und λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes bedeuten. Diese Komponenten haben die gleiche oder entgegengesetzte Phase, je nachdem n gerad- oder ungeradzahlig ist. Alle geradzahlig Beugungsordnungen haben die gleiche Polarisationsrichtung wie das einfallende Licht und müssen daher bei Beobachtung durch ein zum Polarisator Nicol gekreuztes Nicol verschwinden. Dieses theoretische Ergebnis erklärt die oben beschriebene, von Hiedemann und Hoesch an Schubwellen gefundene Beugungserscheinung; allerdings noch nicht vollständig, da noch begründet werden muß, warum die höheren ungeraden Beugungsordnungen nicht beobachtet wurden. Da die Zahl der beobachtbaren Beugungserscheinungen mit der Intensität der elastischen Wellen zunimmt, so war zu erwarten, daß das Fehlen der dritten und der höheren ungeradzahlig Beugungsordnungen auf zu geringer Intensität der Schubwellen

¹⁾ Hans Mueller, Phys. Rev. **52**, 223, 1937.

beruhte. Es wurde daher zunächst die Schwingungsintensität des Glaskörpers gesteigert, wobei bis zu ± 4 Beugungsordnungen an den longitudinalen Wellen (ohne Nicols) beobachtet wurden und gelegentlich ganz schwach auch die fünften Beugungsordnungen. Auch dann war die dritte Beugungsordnung an den Schubwellen nicht zu erhalten. Da eine weitere Steigerung der Schwingungsintensität auf Schwierigkeiten stieß, wurde von Mueller auf eine Bitte des Verfassers berechnet, wieviel Beugungsordnungen an den Schallwellen auftreten müssen, damit die dritte Beugungsordnung an Schubwellen bei gekreuzten Nicols sichtbar wird. Unter der Annahme gleicher Schwingungsenergie für Schub- und Schallwellen ergab sich eine Intensität, bei der an Schallwellen die fünfte Beugungsordnung mit größerer Intensität in Erscheinung tritt. Da eine solche Intensität noch nicht erreicht werden konnte, vervollständigt diese Berechnung die Erklärung der beschriebenen Beugungserscheinung durch die Nath-Muellersche Theorie. Die Theorie von Nath und Mueller begründet ferner auch die Methode der spannungsoptischen Analyse der Beugungserscheinungen an schwingenden Gläsern, die von Hiedemann und Hoesch¹⁾ angegeben und zur Zuordnung der Beugungserscheinungen zu longitudinalen und transversalen Anteilen elastischer Wellen benutzt worden ist. Aus der Nath-Muellerschen Theorie folgt nämlich erstens, daß bei Beobachtung unter gekreuzten Nicols, wobei die Polarisationsrichtung einen Winkel von 45° mit der Fortpflanzungsrichtung der Schubwellen bildet (also parallel einer der Achsen der Brechungsindexellipsen ist), die Beugungserscheinungen an Schubwellen verschwinden müssen. Für Schallwellen sind die Achsen der Brechungsindexellipse senkrecht und parallel der Richtung der Schallfortpflanzung. Die Schwankungen des Brechungsindex μ_1 und μ_2 sind in diesem Falle in Phase, haben aber verschiedene Größe. Bei gekreuzten Nicols, wobei die Polarisationsrichtung parallel oder senkrecht der Fortpflanzungsrichtung der Schallwellen (also parallel einer der Achsen der zugehörigen Brechungsindexellipse) ist, verschwinden zweitens die Beugungseffekte an den longitudinalen Wellen. Auf diesen beiden Ergebnissen der Nath-Muellerschen Theorie beruht aber die Methode der spannungsoptischen Analyse.

Die Nath-Muellersche Theorie leistet aber wesentlich mehr als die Erklärung dieser schon bekannten Versuchsergebnisse; sie sagt z. B. voraus, daß, wenn die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes einen Winkel von 45° mit der Fortpflanzungsrichtung der Schallwellen bildet, dann alle

¹⁾ E. Hiedemann u. K. H. Hoesch, ZS. f. Phys. **98**, 141, 1935.

Beugungsordnungen am Schallwellengitter linear polarisiert sind, wobei aber die Polarisationsrichtung jeder Beugungsordnung einen anderen Winkel mit der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes bildet. Durch Drehen des Analysatornicols kann man bei fortschreitenden Schallwellen eine Beugungsordnung nach der anderen verschwinden lassen; bei stehenden Wellen geht die Intensität jeder Beugungsordnung dabei durch ein von Null verschiedenes Minimum hindurch. Auch diese Voraussagen konnten zunächst für den Fall von stehenden Schallwellen experimentell bestätigt werden. Aus dem Winkel, um den man den Analysator drehen muß, um die einzelnen Beugungsordnungen auf minimale Intensität einzustellen, kann man nach der Nath-Muellerschen Theorie die elasto-optischen Konstanten des Glases berechnen. Bei dem Versuch, die Genauigkeit dieser Winkelmessung zu steigern, wurde zunächst experimentell festgestellt, daß die Minimumlage jeder Beugungsordnung eine Funktion der Schallintensität ist, was sich dann ebenfalls aus der Nath-Muellerschen Theorie ableiten ließ. Dies Ergebnis dürfte deshalb wichtig sein, weil man umgekehrt aus der Minimumlage einer bestimmten Beugungsordnung die Schallintensität berechnen kann. Hierdurch wird also eine experimentell sehr einfache Messung der Schallintensität in Gläsern möglich, die man z. B. unter anderem zur Untersuchung der Intensitätsverhältnisse von gekoppelten Schwingungen in Glaskörpern benutzen kann. Aus der Nath-Muellerschen Theorie ergibt sich ferner, daß bei Berücksichtigung des gleichzeitigen Vorhandenseins von transversalen und longitudinalen elastischen Wellen, Beugungserscheinungen auftreten unter Beugungswinkeln φ , die gegeben sind durch: $\sin \varphi = n \cdot \lambda / \lambda_L + m \cdot \lambda / \lambda_T$, wo n und m ganze Zahlen und λ_L bzw. λ_T die Wellenlängen der Schall- bzw. der Schubwellen sind. Ist das Licht parallel zu der Fortpflanzungsrichtung der Schallwelle polarisiert, so treten für parallele Nicols nur geradzahlige Werte von m auf und für gekreuzte nur ungeradzahlige. Die experimentelle Beobachtung solcher „Kombinationslinien“ ist bei der Anordnung mit Spalt nicht möglich, weil dann die lichtstarken Beugungserscheinungen an den longitudinalen Wellen alle geringeren Intensitäten verdecken. Man muß vielmehr eine Lochblende benutzen, wodurch es möglich wird, die einzelnen Erscheinungen getrennt zu beobachten. Über die quantitative Auswertung der experimentellen Prüfung der Nath-Muellerschen Theorie, insbesondere über die Messung der elasto-optischen Konstanten von Gläsern, soll demnächst noch berichtet werden.

Dem Verfasser erschien es naheliegend, den Hinweis von Mueller, daß Transversalwellen zwar keine Schwankungen der Dichte, wohl aber

des Brechungsindex bewirken, auf die Brillouinsche Theorie¹⁾ der Rayleigh-Streuung von Licht an Festkörpern anzuwenden. Nach dem Vorbild der Debyeschen Theorie der spezifischen Wärmen²⁾ hat Brillouin bekanntlich der Abhängigkeit der thermischen Bewegung eines Atoms von den Bewegungen der Nachbaratome dadurch Rechnung getragen, daß er diese Bewegung als eine Überlagerung von elastischen Wellen auffaßt. Für die Streuung von Licht berücksichtigt Brillouin nur die longitudinalen elastischen Wellen, weil in diesen Schwankungen der Dichte und damit auch des Brechungsindex auftreten. Brillouin erhält dann die Lichtstreuung in einer bestimmten Streurichtung als Braggsche Reflexion an den thermischen Schallwellen, wobei die Schallwellenlänge dem Abstand der Atomebenen bei der Reflexion von Röntgenstrahlen entspricht. Da für jede Streurichtung zwei in entgegengesetzter Richtung verlaufende thermische Schallwellen der Braggschen Reflexionsbedingung entsprechen und andererseits die Reflexionsebenen wandern, so erleidet das Streulicht einen Doppler-Effekt, so daß eine einfallende Spektrallinie als Dublett gestreut wird, dessen Komponenten die Frequenzänderung:

$$\Delta \nu = \pm 2\nu \cdot \frac{v}{c} \cdot \sin \frac{\Theta}{2}$$

gegenüber dem einfallenden Licht haben, wobei ν die Frequenz des einfallenden Lichtes, v die Schall-, c die Lichtgeschwindigkeit im Medium und Θ der Streuwinkel ist. Berücksichtigt man jetzt für die Lichtstreuung auch noch die Braggsche Reflexion an den thermischen Schubwellen, so müßte das Spektrum des Streulichtes noch ein weiteres Dublett enthalten, dessen Frequenzabstand kleiner ist, da die Geschwindigkeit der Schubwellen kleiner als diejenige der Schallwellen ist. Leider liegt noch zu wenig experimentelles Beobachtungsmaterial vor, um dies Ergebnis zu prüfen. Bemerkenswert ist das Ergebnis für Flüssigkeiten. Macht man die — allerdings sehr kühne — Annahme, daß in Flüssigkeiten thermische Schubwellen existieren könnten, so würde deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt sehr klein sein, da die elastischen Richtkräfte für eine solche Flüssigkeitsbewegung bestimmt sehr klein sein dürften. Das bedeutet aber, daß der Doppler-Effekt an diesen hypothetischen thermischen Schubwellen keine beobachtbare Frequenzänderung bewirken könnte. Außer dem durch den Doppler-Effekt an den Schallwellen verursachten Dublett müßte dann das Spektrum des Streulichtes auch die unverschobene Spektral-

¹⁾ L. Brillouin, Ann. de Physique **17**, 88, 1921. — ²⁾ P. Debye, Ann. d. Physik **39**, 789, 1912.

linie enthalten. Bekanntlich haben die Untersuchungen des an Flüssigkeiten gestreuten Lichtes eine Tripletttaufspaltung bewiesen¹⁾. Diese überraschende Übereinstimmung mit dem Experiment kann bei dem hypothetischen Charakter der mitgeteilten Überlegungen über die Rayleigh-Streuung diesen aber natürlich nur einen heuristischen Wert geben.

Herrn Dr. Hans Mueller und N. S. Nagendra Nath (beide z. Zt. in Cambridge, England) möchte ich auch an dieser Stelle herzlich dafür danken, daß sie mir die Ergebnisse ihrer theoretischen Rechnungen laufend mitteilten und einige experimentelle Ergebnisse rechnerisch auswerteten. Besonderen Dank schulde ich Herrn N. S. Nagendra Nath dafür, daß er meine Bitte, die ihm bei einem Besuche in Köln gezeigten Beugungserscheinungen theoretisch zu deuten, so schnell zusammen mit Herrn Dr. Mueller erfüllt hat.

Die Versuche wurden mit Apparaturen ausgeführt, für deren Bereitstellung ich sowohl Herrn Prof. Falkenhagen wie der Heinholtz-Gesellschaft zu Dank verpflichtet bin.

Köln, Abteilung f. Elektrolyt-Forschung am Phys. Institut d. Univ.

¹⁾ Vgl. z. B. E. H. L. Meyer u. W. Ramm, Phys. ZS. **33**, 270, 1932; W. Ramm, ebenda **35**, 111 u. 756, 1934; B. V. Raghavendra Rao, Proc. Indian Acad. Sci. **1**, 261, 1934.

Zum Verlauf des Einsatzstromes im anomalen Dielektrikum.

Von B. Gross.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Januar 1938.)

Es wird eine Methode zur Bestimmung des Nachladestromes angegeben, die geeignet ist für die Ermittlung des Einsatzstromes. Messungen an Telephondrahtisolierung ergaben Gültigkeit der Beziehung $i = U\beta t^{-n}$.

Einleitung. Legt man an ein festes Dielektrikum eine konstante Spannung an, so beobachtet man neben dem Aufladestrom der geometrischen Kapazität noch den zeitlich rasch abklingenden Nachladestrom. Für Zeiten über 1 sec ist dieser Strom schon vielfach gemessen worden¹⁾; auch Messungen für kleinere Zeiten liegen verschiedentlich vor²⁾. Hierbei hat sich stets ergeben, daß der anfängliche Abfall der Stromstärke außerordentlich steil ist, ohne daß es im allgemeinen möglich gewesen wäre, den *Einsatzwert* direkt zu ermitteln. Nun wäre aber gerade die Kenntnis dieses Grenzwertes von Interesse, sowohl vom praktischen Standpunkt der Isolierstofftechnik aus, wie auch wegen seiner theoretischen Bedeutung. Denn er geht als wesentlicher Parameter in theoretische Darstellungen ein; führt man insbesondere das Abfallen des Stromes auf die Ausbildung einer Gegenspannung zurück, so wird das wahre Leitvermögen geradezu aus dem Einsatzwert definiert. — Die Anomalien der Dielektrika gehören allgemein zu den *Nachwirkungserscheinungen*. Auch im elastischen und magnetischen Verhalten der Körper treten solche auf, wobei die Form der Nachwirkungsfunktion im wesentlichen dieselbe ist wie im elektrischen Falle³⁾. So tritt auch hier das Problem der Beobachtung bzw. Beobachtbarkeit des Einsatzwertes auf und hat auch, wie in diesem⁴⁾, mehrfach Anlaß zu Diskussion

¹⁾ E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **24**, 711, 1907; K. W. Wagner, ebenda **40**, 816, 1913; W. Gnann, ZS. f. Phys. **66**, 436, 1930; Phys. ZS. **36**, 222, 1935 u. a. — ²⁾ F. Tank, Ann. d. Phys. **48**, 307, 1915; K. Sinjelnikoff, A. Walther, ZS. f. Phys. **40**, 786, 1927; O. Beran, F. Quittner, ebenda **64**, 760, 1930; B. Hochberg, A. Walther, ebenda **64**, 392, 1930; W. Scislawski, Acta Phys. Pol. **4**, 123, 1935. — ³⁾ Vgl. R. Becker, ZS. f. Phys. **33**, 185, 1925 über elastische Nachwirkung und J. Preisach, ebenda **94**, 277, 1935; G. Richter, Ann. d. Phys. **29**, 605, 1937 über magnetische Nachwirkung. — ⁴⁾ F. Tank, l. c.; F. Quittner, Phys. ZS. d. Sowjet-Union **6**, 319, 1934; A. Smekal, Phys. ZS. **36**, 742, 1935; A. Goldhammer, Phys. ZS. d. Sowjet-Union **5**, 553, 1934.

gegeben¹⁾. Umgekehrt, wenn in einem der Fälle eine eindeutige Bestimmung des Verhaltens für extrem kurze Zeiten nach „Einschalten“ gelänge, so müßte dies ganz allgemein für die Theorie der Nachwirkungserscheinungen von Interesse sein.

Wir berichten im folgenden über eine Methode zur Bestimmung der elektrischen Nachwirkungsfunktion, die im Anschluß an eine frühere Arbeit²⁾ entwickelt wurde und uns besonders geeignet erscheint für die Untersuchung des Verlaufs in sehr kleinen Zeiten; im Anschluß hieran geben wir das Resultat einer Reihe von Messungen, die wie in I an Telephondrahtisolation ausgeführt wurden. Bei diesem Material zeigen sich die Anomalien in sehr charakteristischer Weise; dies erlaubt eine befriedigende Untersuchung der Anwendbarkeit der Methode und ihrer Möglichkeiten und macht die Resultate typisch für eine Reihe von Isolierstoffen. — Ein endlicher Einsatzstrom ergab sich bis zu 10^{-5} sec nicht.

1. Frühere Messungen. Es mögen zunächst kurz einige früheren Messungen besprochen werden.

Die ersten Bestimmungen sind wohl von Tank³⁾ nach einer Dreischaltermethode ausgeführt worden. Es wird durch den Nachladestrom ein Kondensator bekannter Kapazität aufgeladen und aus dessen Potentialverlauf der Strom berechnet. — An Kondensatoren mit Glas- und Papierisolation fand sich so die v. Schweidlersche Gleichung $i = U\beta t^{-n}$ bis etwa $4 \cdot 10^{-4}$ sec gültig.

Scislowski⁴⁾ hat neuerdings nach derselben Methode Messungen an Paraffin bis etwa 10^{-2} sec ausgeführt und findet gleichfalls im wesentlichen die v. Schweidlersche Gleichung bestätigt.

Sinjelnikoff und Walther⁵⁾ messen mit einem Fadenelektrometer, dessen Stellung photographisch registriert wird, den Spannungsabfall, der von dem Nachladestrom an einem hohen Widerstand erzeugt wird. Die Grenzen der Methode scheinen bei etwa 10^{-2} sec zu liegen. Die Verfasser schließen auf einen anfangs exponentiellen Stromverlauf, welcher durch Extrapolation die Bestimmung des Einsatzwertes gestatten soll. Eine direkte Bestimmung wird aber nicht erhalten.

¹⁾ K. Bannedikt, Phys. ZS. **21**, 703, 1920; **25**, 417, 1924; H. Jordan, ebenda **25**, 579, 1924; R. Becker, l. c. — ²⁾ B. Gross, ZS. f. Phys. **107**, 217, 1937. Im folgenden mit I bezeichnet. — ³⁾ F. Tank, l. c. — ⁴⁾ W. Scislowski, l. c. — ⁵⁾ K. Sinjelnikoff, A. Walther, l. c.; vgl. auch K. Semenoff u. A. Walther, Elektrische Festigkeitslehre. Berlin, Jul. Springer, 1929.

Nachdem von Joffé der Abfall des Stromes in manchen Fällen auf die Ausbildung von Gegenspannungen zurückgeführt wurde¹⁾, erschien es naheliegend, die Messung des Einsatzstromes bzw. des wahren Leitvermögens zu ersetzen durch eine Messung der Gegenspannung nach Erreichen des stationären Zustandes. Nach orientierenden Versuchen einiger Autoren²⁾ wurde eine Präzisionsmethode von Beran und Quittner (l. c.) angegeben und mit ihr auch im Falle eines dielektrischen Kristalls ein Grenzwert der Polarisation gemessen. Es ergab sich, daß diese im vorliegenden Fall sich nach Änderungen der angelegten Spannung nur verhältnismäßig langsam einstellte: 10^{-2} sec nach einer Spannungserniedrigung erst Abfall um 5%.

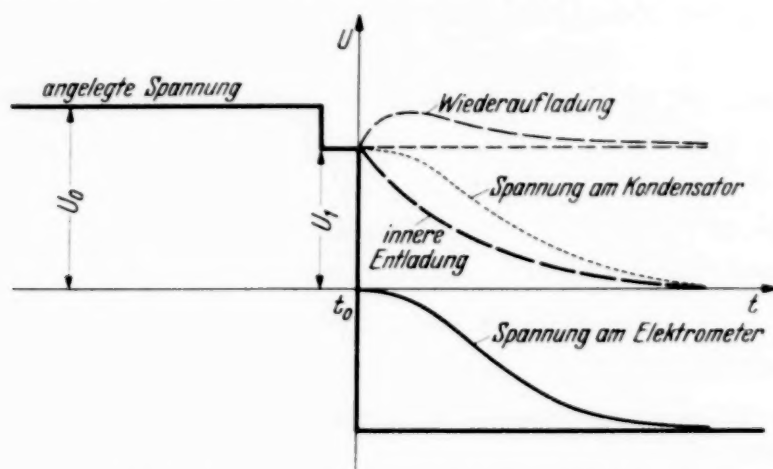


Fig. 1. Zur Methode von Beran—Quittner.

Nimmt man, wie es allgemein geschieht, für niedrige Spannungen Gültigkeit des Superpositionsprinzips an³⁾, so können, wie wir sehen werden, diese Messungen statt als eine Bestimmung einer Gegenspannung genau so gut als eine Bestimmung des Einsatzstromes angesehen werden. Und als solche stehen sie hinsichtlich der Feststellung eines endlichen Einsatzwertes und der relativen Langsamkeit, mit der der Strom abfällt, vereinzelt da, selbst wenn man den Vergleich auf die dielektrischen Kristalle beschränkt.

In jedem Fall erscheint eine etwas eingehendere Diskussion dieser Messungen von Interesse (Fig. 1). Nach Erreichen des stationären Zustandes wird die angelegte Spannung U_0 auf den Wert U_1 erniedrigt. t_0 sec später wird die eine Belegung freigegeben, während gleichzeitig die Spannung U_1 mit einer dem Meßkondensator entgegengesetzten Polarität mit diesem in Serie geschaltet wird. U_1 wird nun solange variiert, bis das

¹⁾ A. Joffé, The physics of crystals. London, Mc Graw Hill, 1927. —

²⁾ D. Nasledow, P. Scharawsky, Ann. d. Phys. **3**, 63, 1929; **5**, 429, 1930; **6**, 574, 1930. — ³⁾ Vgl. A. Smekal, l. c.

parallel geschaltete Elektrometer keinen Ausschlag mehr gibt. Läßt sich dies innerhalb eines gewissen Intervalls t_0 erreichen, so ist U_1 gleich der Polarisationsspannung P .

Wenden wir auf den Vorgang nun das Superpositionsprinzip an, so sehen wir, daß er sich durchaus in das in I gegebene Schema einordnen läßt. Nach dem Freigeben der Belegung überlagern sich zwei Effekte: Einmal erfolgt eine Entladung des Systems über den inneren Widerstand R mit der Stromstärke U_1/R ; daneben folgt dem Spannungsstoß $(U_0 - U_1)$ eine anomale Stromkomponente $-(U_0 - U_1) \varphi(t + t_0)$. Da wir uns auf den Fall schon erfolgter Kompensation beschränken, so fallen Glieder mit dU/dt weg. Der äußere Stromkreis ist geöffnet, die beiden obigen Terme müssen sich also gerade ausgleichen. Man hat $U_1/R = (U_0 - U_1) \varphi(t + t_0)$. Soll diese Beziehung Werte für U_1 ergeben, die innerhalb eines gewissen Intervalls von t und t_0 unabhängig sind, so muß $\varphi(t + t_0) = \varphi(0)$ sein, und man erhält, wenn man noch für das Einsatzleitvermögen $\varphi(0)$ den Einsatzwiderstand $\varrho \ll R$ einführt, die Beziehung $U_1 = U_0(1 - \varrho/R)$. Hieraus läßt sich also ϱ berechnen. Andererseits ist der obige Ausdruck gerade gleich der „Polarisationsspannung“. Denn setzt man den Wert des stationären Stromes U_0/R gleich $(U_0 - P)/\varrho$, so wird P gerade gleich U_1 .

Bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips kommt also die Quittner'sche Methode einer Messung des Einsatzstromes gleich.

2. Meßmethode. Wird an ein Dielektrikum während des Intervalls t_0 die konstante Spannung U_0 angelegt und wird dann der äußere Stromkreis geöffnet, so berechnet sich der Spannungsverlauf (vgl. I) nach der Gleichung

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \varphi(t - \tau) d\tau + U_0 \varphi(t + t_0) = 0. \quad (1)$$

Hierbei ist C die geometrische Kapazität der Anordnung, $\varphi(t)$ die Nachwirkungsfunktion. Ist die Ladedauer t_0 und das Beobachtungsintervall t noch klein, so kann man das Glied U/R , das den Entladestrom über den großen inneren Widerstand R gibt, noch vernachlässigen. Für $t \rightarrow 0$ geht Gleichung (1) dann über in

$$\varphi(t_0) = - \frac{C}{U_0} \left(\frac{dU}{dt} \right)_0. \quad (2)$$

Mißt man also den Spannungsverlauf $U(t)$ für verschiedene Ladezeiten t_0 , so erhält man aus der Steigung der Kurven im Ursprung direkt die Zeitfunktion des Nachladestromes. Wenn bei immer abnehmendem t_0 die

Kurven schließlich ineinander übergehen, so zeigt dies, daß der Einsatzwert erreicht und $q(t_0)$ gleich $q(0)$ geworden ist.

Es erscheint natürlich wünschenswert, die Diskussion nicht nur auf den Spannungsverlauf in der unmittelbaren Umgebung des Nullpunktes zu beschränken, sondern auch den weiteren Verlauf heranzuziehen. Der Weg hierzu ist der, mit der aus (2) bestimmten Zeitfunktion in Gleichung (1) einzugehen, hieraus den Spannungsverlauf zu berechnen und ihn mit den gemessenen Kurven zu vergleichen. Eine quantitative Diskussion setzt zunächst eine strenge Lösung von Gleichung (1) voraus. Eine solche ist aber, selbst ohne das Glied U/R , sehr schwierig. Dagegen wird man eine qualitative Lösung erhalten, wenn man wie in I, Gleichung (16), den Term $dU/d\tau$ als langsam veränderlich gegenüber $q(t - \tau)$ ansieht und vor das Integral zieht. Man erhält dann

$$\frac{C}{U_0} \frac{dU}{dt} = \frac{q(t + t_0)}{1 + \frac{1}{C} \int_0^t q(t) dt}. \quad (3)$$

Ist insbesondere

$$q(t) = \beta t^{-n}, \quad (4)$$

so folgt schließlich, mit denselben Vernachlässigungen wie in I,

$$\frac{U_0 - U}{U_0} = \frac{(t + t_0)^{1-n} - t_0^{1-n}}{\frac{C(1-n)}{\beta} + t^{1-n}}. \quad (5)$$

Die Berechtigung der gemachten Voraussetzungen kann theoretisch nur schwer übersehen werden. Sie erscheint aber gegeben, wenn berechnete und gemessene Kurven übereinstimmen. Um vor Zufälligkeiten sicher zu sein, muß sich der Vergleich allerdings sowohl hinsichtlich t wie t_0 über möglichst große Intervalle erstrecken.

3. Meßanordnung. Fig. 2 gibt ein Schema der Meßanordnung. Die drei Kontakte eines Helmholtz-Pendels (I, II, III) sind vor Beginn jeder Messung geschlossen. Nach Auslösen des Pendels wird zunächst I geöffnet und hierdurch die Spannung an den Meßkondensator angelegt. Wird II geöffnet, so ist eine Belegung freigegeben und der Spannungsabfall setzt ein. Öffnen von III bewirkt schließlich Abschalten des Elektrometers, das also die Spannung in diesem Moment anzeigt. Die Zeitdauer, die zwischen dem Öffnen von I und II vergeht, ergibt t_0 und diejenige zwischen

II und III ergibt t . Um bei gegebenem t_0 eine Kurve $U(t)$ auszumessen, wird also der Abstand II bis III innerhalb des gewünschten Bereiches variiert. Jeder Stellung entspricht ein Meßpunkt. Man erhält also den Spannungsverlauf durch eine rein statische Methode. Sie ist zwar etwas langwierig, hat aber gegenüber einer dynamischen Methode, bei der etwa die Bewegung des Elektrometerfadens photographisch registriert wird, den großen Vorzug der völligen Unabhängigkeit von der mechanischen Trägheit des Instrumentes. — Zwischen zwei Messungen muß das System natürlich eine Zeitlang geerdet sein, damit keine gegenseitige Beeinflussung auftritt. — Wesentlich ist ferner, daß nach dem Öffnen von I der Spannungsanstieg auch wirklich instantan erfolgt. Hierzu muß der Widerstand r , der zusammen mit der geometrischen Kapazität des Meßsystems die Zeit-

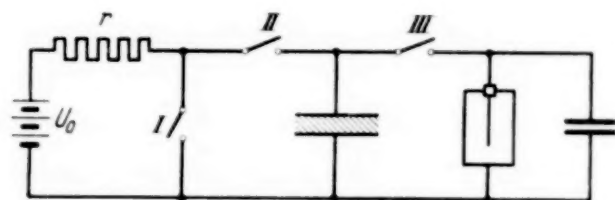


Fig. 2. Versuchsanordnung.

konstante der Einstellung bedingt, entsprechend klein sein. C war bei den Versuchen gleich $1,3 \cdot 10^{-8}$ F, r zwischen 20 und 100 Ohm, entsprechend dem Wert von t_0 . Die Konstanz der Spannung während der Ladung wurde noch dadurch überprüft, daß mit einer Stellung von III begonnen wurde, die noch vor I lag, bei der also das Elektrometer noch keinen Ausschlag gab. Sobald III hinter I rückte, sprang die Spannung auf U_0 , um dann abzufallen, wenn III nach II betätigt wurde.

Um die geometrische Kapazität zu bestimmen, wurde nach einer entsprechenden Methode die Aufladung des Meßsystems über einen bekannten Widerstand ($1,16 \cdot 10^6$ Ohm) beobachtet. Die Kurve verläuft, wie sich erwarten läßt, zwar auch nicht streng exponentiell, aber die Abweichungen sind zumindest im Anfangsgebiet genügend klein, so daß man die Zeitkonstante und hiermit C mit genügender Annäherung bestimmen kann.

Die Kalibrierung des Pendels erfolgte durch Beobachtung der Aufladung eines Luftkondensators über einen bekannten Widerstand.

Die Kontakte I und II des Pendels waren in der üblichen Weise mit Hartgummi isoliert; Kontakt III, dessen Isolation ja längere Zeit beansprucht wurde (parallel zum Elektrometer), mit Bernstein.

Störend erwies sich die nicht unbeträchtliche innere Kapazität der Kontakte. Nach Öffnen von III ist das Elektrometer zwar, was den Leitungs-

strom betrifft, isoliert. Die innere Entladung des Meßkondensators geht aber weiter, die Spannung auf der einen Kontaktseite von III sinkt daher weiter rasch ab und hierdurch wird auf dem Elektrometersystem eine gewisse Elektrizitätsmenge influenziert, die noch von dem Zeitpunkt der Öffnung von III abhängt. Um die so erzeugte Spannung zu reduzieren, wurde die Kapazität des Elektrometersystems durch Parallelschaltung einer weiteren Kapazität erhöht.

Der Meßkondensator war, wie in I, eine Rolle Telephondraht mit Isolierung aus vulkanisiertem Gummi.

4. *Meßresultate.* Zunächst wurden für Werte der Ladedauer t_0 zwischen 10^{-5} Sekunden und $5 \cdot 10^{-2}$ Sekunden die zugehörigen Entladekurven gemessen. Die Meßresultate sind in den Fig. 3 bis 8 wiedergegeben. Ersichtlich läßt sich in dem betrachteten Bereich ein Zusammenrücken der Kurven für abnehmende Werte t_0 nicht feststellen. Schon 10^{-5} sec nach Anlegen der Spannung muß also der Nachladestrom auf einen Bruchteil seines Einsatzwertes abgesunken sein. Man sieht dies noch deutlicher, wenn man nun, nach Gleichung (2) die Funktion $q(t)$ bestimmt. Die hierzu notwendige Bestimmung der Steigung der Entladekurven im Ursprung läßt sich trotz der Streuung der Meßpunkte mit hinreichender Annäherung ausführen; die graphisch bestimmten Tangenten im Ursprung sind in die Figuren eingetragen. Multiplikation mit der geometrischen Kapazität C ergibt die in Fig. 9 im Intervall 10^{-5} bis $5 \cdot 10^{-2}$ sec eingetragenen Werte. Sie liegen ersichtlich auf einer Geraden bei logarithmischem Maßstab. Um die Verlängerung der Kurve für größere Zeiten zu erhalten, sind in dieselbe Figur auch noch Resultate einer direkten Messung des Nachladestromes mit dem Galvanometer im Zeitintervall 10 bis 10^3 sec eingezeichnet. Diese Punkte liegen auf derselben Geraden wie diejenigen für kleine Zeiten; innerhalb des ganzen Intervalls, d. h. also über einen Bereich von annähernd acht Größenordnungen, wird die Nachwirkungsfunktion durch die Beziehung (4) wiedergegeben; für die eingehenden Konstanten erhält man: $n = 0,9$; $\beta/C = 0,19$.

Man kann nun weiterhin nach Gleichung (5) den Spannungsverlauf berechnen und untersuchen, wie weit die so berechneten Kurven mit den gemessenen übereinstimmen. Die in die Fig. 3 bis 8 eingezeichneten Kurven sind nach Gleichung (5) berechnet. Vergleicht man die berechneten und die beobachteten Kurven, so findet man eine weitgehende Übereinstimmung, die um so befriedigender ist, als sich die beiden Parameter t und t_0 in dem untersuchten Bereich um mehrere Größenordnungen ändern.

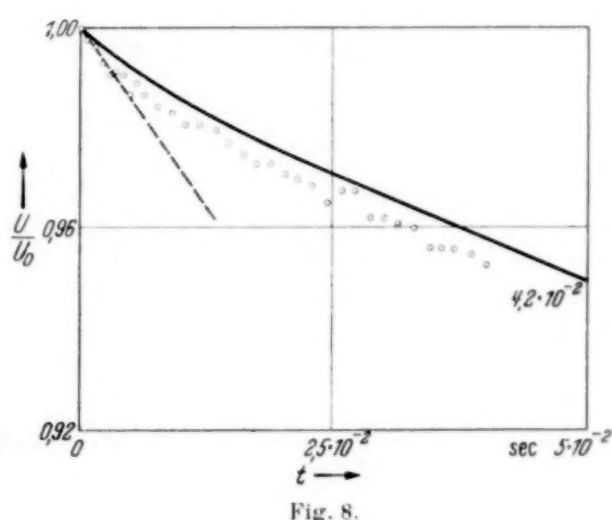
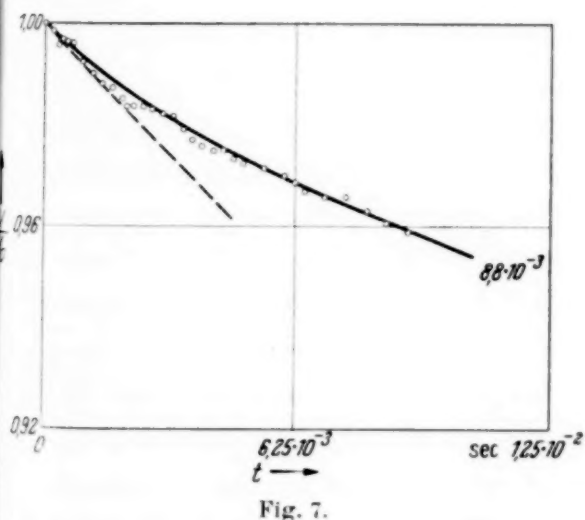
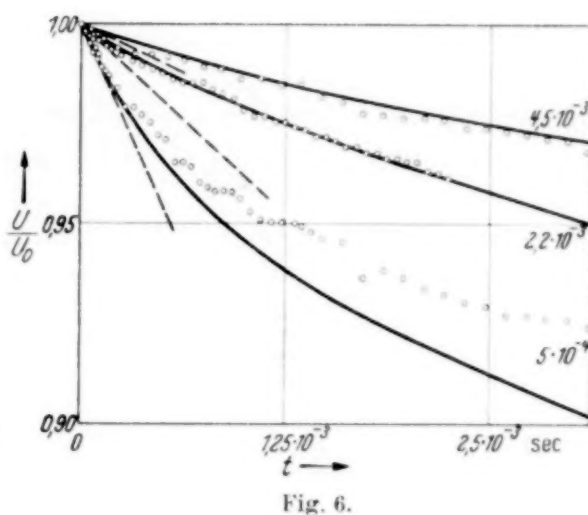
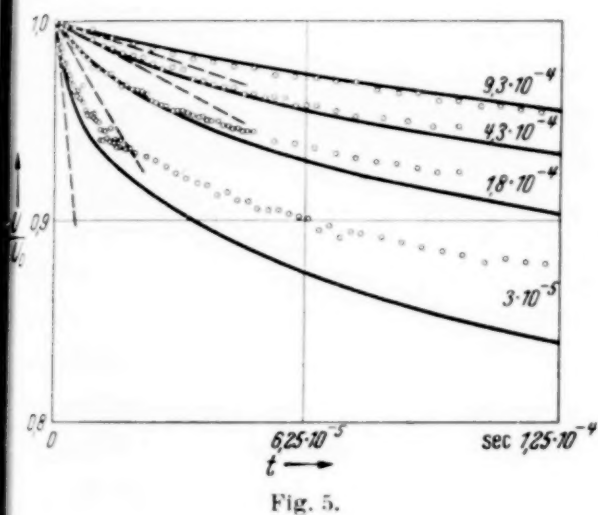
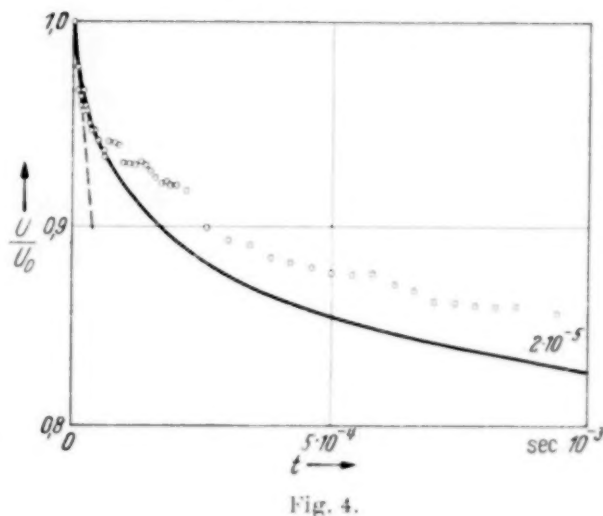
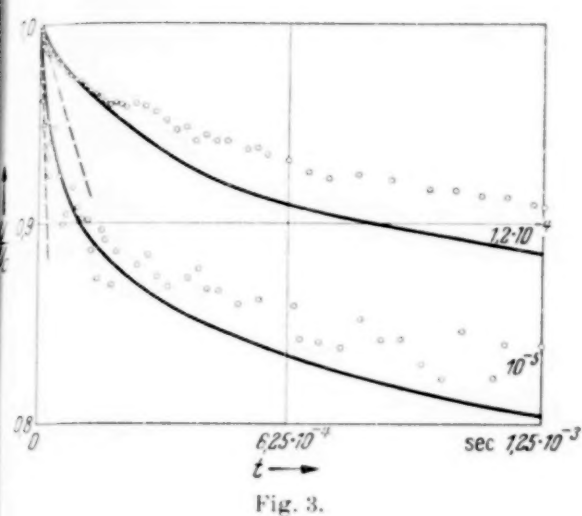


Fig. 3 bis 8. Der Spannungsabfall am isolierten Kondensator. Die Ladezeiten (in Sek.) sind jeweils beige-schrieben. Die ausgezogenen Kurven sind nach Gleichung (5) berechnet.

Schließlich gibt Fig. 10 noch eine Messung, bei der die Entladedauer t konstant gleich $1,5 \cdot 10^{-2}$ sec gehalten und t_0 variiert wurde. Auch hier zeigt

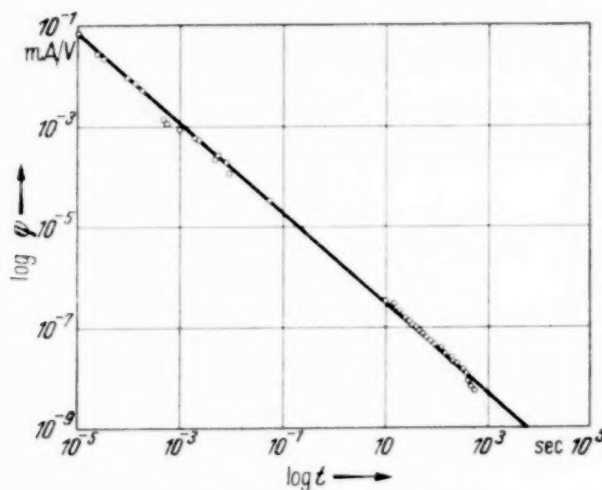


Fig. 9. Nachwirkungsfunktion.

sich mit abnehmendem t_0 kein Zusammenrücken der Meßpunkte, wie sich bei Annäherung an einen Grenzwert erwarten ließe. Die eingezeichnete Kurve

ist wieder nach Gleichung (5) berechnet; die Konstante

$$C(1-n)/\beta + t^{1-n}$$

ist hier so gewählt, daß die Übereinstimmung mit der berechneten Kurve möglichst gut ist; und zwar ist sie gleich 1,44 gesetzt, an Stelle von 1,18. In dem logarithmischen Maßstab bedeutet dies einfach eine Parallelverschiebung der Kurve. Wie die Figur zeigt, ist aber die so erzielte Übereinstimmung sehr befriedigend und somit ein weiterer Beweis dafür, daß der Nachladestrom 10^{-5} Sekunden nach Anlegen der Spannung vom Anfangswert schon weit entfernt ist.

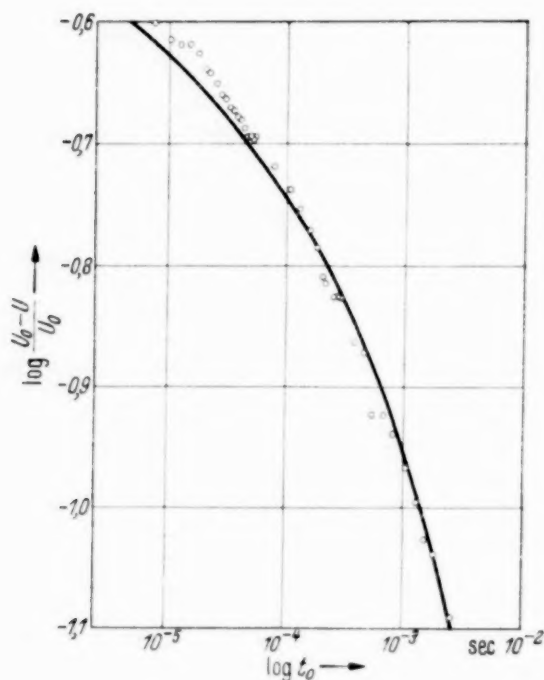


Fig. 10.

5. Diskussion. Wir können somit die Gültigkeit der Gleichung (4) zumindest in dem betrachteten Intervall als erwiesen ansehen. Unsere Resultate beziehen sich zwar auf ein spezielles Dielektrikum; sie werden aber typisch zumindest für eine große Reihe technisch wichtiger Isolierstoffe, wenn man sie zusammen betrachtet mit der Tatsache, daß es bisher all-

gemein nicht möglich ist, den Einsatzwert $q(0)$ *direkt* zu bestimmen. Man braucht sich dabei nicht auf die eingangs zitierten Arbeiten beschränken, sondern kann allgemein Untersuchungen heranziehen, die sich mit dem Verlauf einer der Anomalien in kleinen Zeiten beschäftigen.

Man hat gegen die Gleichung (4) eingewendet, daß sie für $t = 0$ zu dem unmöglichen Wert $i = \infty$ führt. Dieser Einwand erscheint uns jedoch nicht berechtigt.

Gleichung (4) gibt eine Definition für die Zeitfunktion $q(t)$. Der wirklich auftretende Strom i ist gleich $U_0 q(t)$ nur, wenn die Spannungsänderung am Kondensator streng diskontinuierlich erfolgt. Unter diesen Umständen würde aber auch schon der rein kapazitive Strom $C \frac{dU}{dt}$ unendlich werden.

Trotzdem schließt man hier nicht, daß der Ausdruck für den Verschiebungsstrom abzuändern ist, sondern daß diskontinuierliche Spannungsänderungen auszuschließen sind: Man kann eben die Spannung am Kondensator nicht willkürlich vorgeben, sondern muß sie aus der Aufladegleichung bestimmen.

Auch auf Grund der Gleichung (4) sind diskontinuierliche Spannungsänderungen auszuschließen. Und zwar ist es gerade das Unendlichwerden der Funktion $q(t)$ im Nullpunkt, welches eine dem Nachladevorgang eigene Relaxationszeit bedingt. Der Nachladestrom darf ersichtlich zumindest nie so groß werden, daß der von ihm an dem stets vorhandenen äußeren Widerstand r erzeugte Spannungsabfall den Wert der angelegten Spannung U_0 erreicht. Hierdurch ist aber eine Bedingung gegeben für die Geschwindigkeit, mit der der Anstieg der Spannung am Kondensator maximal erfolgen kann. Man wird die Mindestdauer des Spannungsanstieges abschätzen können, indem man berechnet, von wann ab die von i an r erzeugte Spannung kleiner als U_0 wird — unter Zugrundelegung der Formel für diskontinuierliche Änderung. Aus $ir = U_0$ folgt mit $i = U_0 \beta t^{-n}$ für diese Zeit

$$T' = (\beta r)^{1/n}.$$

Um einen Vergleich mit der Zeitkonstante der geometrischen Kapazität zu erhalten, bedenkt man, daß $n \simeq 1$ ist. Damit wird

$$T : T' = C : \beta.$$

In unserem Fall wird das Verhältnis etwa 5:1. Wesentlich erscheint uns hieran, daß die beiden T -Werte annähernd innerhalb derselben Größenordnung liegen.

Wir wollen aus den bisherigen Ausführungen keineswegs den Schluß ziehen, daß die Nachwirkungsfunktion für verschwindendes Argument keinen endlichen Grenzwert besitzen *kann*, sondern nur zeigen, daß der Sachverhalt bisher keineswegs *zwingend* zur Annahme eines solchen führt und daß man ohne prinzipielle Bedenken für $q(t)$ den v. Schweidlerschen Ausdruck setzen darf. Man wird dies also in all den Fällen tun *müssen*, in denen der experimentelle Sachverhalt sich am besten durch diese Beziehung deuten läßt — zumindest solange noch keine allgemein anerkannte Theorie der Nachwirkungsvorgänge vorliegt¹⁾.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. E. L. da Fonseca Costa habe ich für die Ermöglichung der Arbeit und stete Anteilnahme sehr zu danken.

Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Tecnologia do Ministerio do Trabalho.

¹⁾ Vgl. hierzu auch Volterra, Rendiconti Acad. dei Lincei, I sem. 1909, S. 203; D. Graffi, Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia (Ulrico Hoepli, Mailand 1936).

Elektronenoptische Theorie der derzeit in Verwendung stehenden Präzisionsmassenspektrographen.

Von **Richard Herzog** und **Viktor Hauk**.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Januar 1938.)

Eine allgemeine Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung wird abgeleitet und auf die derzeit verwendeten Massenspektrographen angewandt. Es wird die Lage der photographischen Platte mit den Kurven verglichen, auf denen Geschwindigkeits- bzw. Richtungsfokussierung stattfindet. Die Theorie von **Astons** Apparatur wurde auf beliebig große Ablenkwinkel erweitert, ferner wurden Vorschläge zur Verbesserung des Auflösungsvermögens und der Intensität gemacht.

Einleitung. In einer früheren Arbeit¹⁾ konnte der eine von uns zeigen, daß sowohl elektrische Radialfelder als auch homogene Magnetfelder, sowie eine Kombination beider, auf ein Kanalstrahlenbündel genau so wirken wie eine Zylinderlinse auf ein Lichtstrahlenbündel, das die Linse am Rande durchsetzt. In dieser Arbeit wurden Formeln abgeleitet, mit deren Hilfe es möglich ist, aus den geometrischen Abmessungen der Felder die Lage der Brennpunkte und der Hauptpunkte zu berechnen. Ein aus einem Objektpunkte divergierendes Strahlenbündel wird in einem Bildpunkt vereinigt, dessen Lage sich nach den bekannten Gesetzen der geometrischen Optik berechnen läßt. Verändert man die Masse oder die Geschwindigkeit der Teilchen, so ändert sich auch die Lage der Kardinalpunkte; deshalb ist auch die Lage der Bildpunkte von der Masse und Geschwindigkeit der Teilchen abhängig.

Sendet man ein heterogenes Kanalstrahlenbündel durch ein elektrisches und magnetisches Feld, so kann man durch geeignete geometrische Abmessungen erreichen, daß die Lage des Bildes des Eintrittsschlitzes von der Geschwindigkeit der Teilchen unabhängig ist, jedoch von der Masse der Teilchen abhängt. Eine derartige Anordnung stellt einen Massenspektrographen dar, bei dem sowohl Richtungs- als auch Geschwindigkeitsfokussierung erreicht ist. **Mattauch** und **Herzog**²⁾ haben nachgewiesen, daß man bei einer Anordnung, bei der der Strahl erst ein elektrisches Radialfeld und dann ein homogenes Magnetfeld passiert, gleichzeitig für alle Massen doppelte Fokussierung erhalten kann, wenn der Polschuh des Magnetfeldes geeignet geformt ist. Besondere Beachtung fand der Spezialfall einer

¹⁾ R. Herzog, ZS. f. Phys. **89**, 447, 1934. — ²⁾ J. Mattauch u. R. Herzog, ebenda, S. 786.

geradlinigen Polschuhbegrenzung, der inzwischen experimentell ausgeführt wurde¹⁾ und die theoretischen Erwartungen vollauf bestätigte. Außer diesem Massenspektrographen, der der einzige ist, bei dem doppelte Fokussierung auf der ganzen Länge der photographischen Platte stattfindet, wurden in den letzten Jahren von Dempster²⁾ und von Bainbridge und Jordan³⁾ Anordnungen in Betrieb genommen, bei denen doppelte Fokussierung nur an einer einzigen Stelle der photographischen Platte vorhanden ist. Bei diesen Massenspektrographen befindet sich die photographische Platte entweder an der Stelle, wo Richtungsfokussierung, oder an jener Stelle, wo Geschwindigkeitsfokussierung erhalten wird, oder irgendwo dazwischen. Mattauch⁴⁾ konnte zeigen, daß die beiden Apparaturen Spezialfälle der elektronenoptischen Theorie sind.

Um aber die Verhältnisse bei diesen Anordnungen genau zu übersehen, ist es notwendig, in Erweiterung der früher gegebenen Theorie, die Kurve zu berechnen, auf der sich Strahlen verschiedener Geschwindigkeit schneiden. Aus der im folgenden abgeleiteten Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung läßt sich der Abstand eines derartigen Vereinigungspunktes von Strahlen verschiedener Geschwindigkeit vom Magnetfeld berechnen.

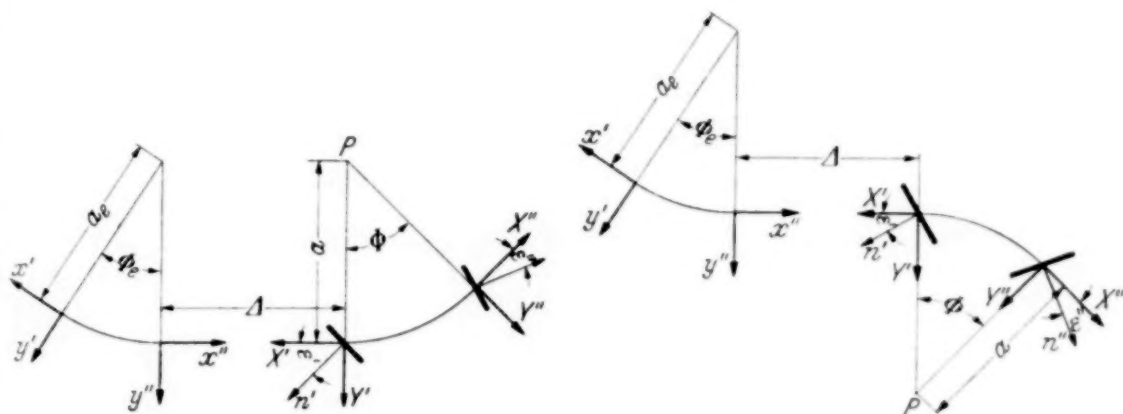
Die entwickelte Theorie wird auf die oben erwähnten sowie auf den Astonschen Massenspektrographen angewandt und die Lage der photographischen Platte mit den zwei Kurven verglichen, auf denen sich Strahlen verschiedener Geschwindigkeit bzw. verschiedener Richtung schneiden. Der so gewonnene Überblick gestattet es, Vorschläge zur Verbesserung der bestehenden Apparaturen zu machen.

Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung.

Zunächst seien kurz einige Formeln aus der elektronenoptischen Theorie⁵⁾, die für das Folgende benötigt werden, zusammengestellt und erklärt. Wir betrachten zuerst ein elektrisches Radialfeld oder ein homogenes Magnetfeld vom Öffnungswinkel Φ , dessen Begrenzung mit den y -Achsen der beiden Koordinatensysteme $x'y'$, $x''y''$ zusammenfällt (vgl. Fig. 1

¹⁾ J. Mattauch, Phys. Rev. **50**, 617, 1936; Naturwissensch. **25**, 156, 170, 189, 738, 1937; Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa, **145**, 461, 1936; J. Mattauch u. R. Herzog, Naturwissensch. **25**, 747, 1937; J. Mattauch u. V. Hauk, ebenda, S. 763, 780. — ²⁾ A. J. Dempster, Proc. Amer. Phil. Soc. **75**, 755, 1935; Phys. Rev. **51**, 67, 1937. — ³⁾ K. T. Bainbridge u. E. B. Jordan, Phys. Rev. **50**, 282, 1936. — ⁴⁾ J. Mattauch, Phys. Rev. **50**, 617, 1936. — ⁵⁾ R. Herzog, l. c. Die in [] gesetzten Formeln wurden mit der ursprünglichen Gleichungsnummer dieser Arbeit entnommen.

links). Die Feldstärke sei so eingerichtet, daß Partikeln von der Masse M_0 und der Geschwindigkeit v_0 , die das Feld entlang der negativen x' -Achse betreten, im Feld eine Kreisbahn vom Radius a beschreiben. Wir betrachten nun ein Bündel von Strahlen der Geschwindigkeit $v = v_0 \cdot (1 + \beta)$ und



Gleichsinnige Ablenkung.

Entgegengesetzte Ablenkung.

Fig. 1. Lage der Koordinatensysteme.

der Masse $M = M_0 \cdot (1 + \gamma)$, das vom Punkte $x' = l'$ und $y' = b'$ ausgeht. Seine Gleichung lautet: $y' = \alpha' (x' - l') + b'$.

Es seien b'/a sowie β und γ kleine Größen, die in zweiter Ordnung vernachlässigt werden können. Dann ist das aus dem Felde austretende Bündel gegeben durch:

$$y'' = \alpha' \cdot \left\{ -\frac{a}{z} \sin z\Phi - l' \cos z\Phi + x'' \left[-\cos z\Phi + \frac{l'}{a} z \sin z\Phi \right] \right\} + \delta a \left[\frac{x''}{a} z \sin z\Phi + 1 - \cos z\Phi \right] - b' \left[\frac{x''}{a} z \sin z\Phi - \cos z\Phi \right]. \quad [24]$$

Hierin ist für ein elektrisches Radialfeld $a = a_e$, $\Phi = \Phi_e$, $z = z_e = \sqrt{2}$ und $\delta = \delta_e = \beta + \frac{1}{2}\gamma$ (vgl. Gleichung [17e] und [18e]), für ein homogenes Magnetfeld $a = a_m$, $\Phi = \Phi_m$, $z = z_m = 1$ und $\delta = \delta_m = \beta + \gamma$ (vgl. Gleichung [17m] und [18m]) zu setzen.

Bilden im Falle eines homogenen Magnetfeldes die Normalen n', n'' der Feldbegrenzung mit den Achsen X', X'' die Winkel $\varepsilon', \varepsilon''$ (siehe Fig. 1, rechts) und lautet die Gleichung des eintretenden Strahles $Y' = A' X' + y_1$, dann gilt für den austretenden Strahl:

$$Y'' = \left(-A' a \sin \Phi + y_1 \cdot \frac{\cos (\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \right) - X'' \left[A' \frac{\cos (\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} + \frac{y_1}{a} \cdot \frac{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \right] + \delta \left\{ a (1 - \cos \Phi) + X'' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon'' (1 - \cos \Phi)] \right\}. \quad [42]$$

Der Wiedervereinigungspunkt eines Strahlenbündels hat die Eigenschaft, daß für ihn Y'' von A' (bzw. y'' von α') unabhängig sein muß. Diese Bedingung kann, wie gezeigt wurde, auf die aus der geometrischen Optik bekannte Gestalt der Abbildungsgleichung

$$(l' - g') \cdot (l'' - g'') = f^2 \quad [48] \text{ bzw. } [31]$$

gebracht werden, worin die Größen

$$g' = a \cdot \frac{\cos \varepsilon' \cos (\Phi - \varepsilon'')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}, \quad g'' = a \cdot \frac{\cos \varepsilon'' \cos (\Phi - \varepsilon')}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} \quad [45]$$

den Abstand der Brennpunkte vom Feldrand darstellen und

$$f = a \cdot \frac{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}{\sin (\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')} \quad [47]$$

die Brennweite bedeutet.

Für den einfacheren, der Gleichung [24] entsprechenden Fall erhält man für die Linsengrößen analog:

$$g = \frac{a}{\kappa} \cotg \kappa \Phi \quad [25]$$

und

$$f = \frac{a}{\kappa} \cdot \frac{1}{\sin \kappa \Phi}. \quad [30]$$

Für die Ableitung der Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung betrachten wir nur solche Teilchen, die das elektrische Feld auf der x' -Achse (Fig. 1) betreten, jedoch verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Die Bahngleichung der Teilchen nach Verlassen des Feldes finden wir aus Gleichung [24] und [18e] für $\alpha' = b' = \gamma = 0$:

$$y'' = \beta a_e \cdot \left[\frac{x''}{a_e} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \sqrt{2} \Phi_e + 1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e \right]. \quad (1)$$

Diese Bahngerade kann man auch in dem zum Magnetfeld gehörigen Koordinatensystem X' , Y' beschreiben, wobei die Transformationsgleichungen lauten:

$$X' = A - x''; \quad Y' = y''. \quad (2)$$

Hierbei erfolgt die Ablenkung im elektrischen und magnetischen Felde im gleichen Sinne. Im folgenden wird hierfür stets der positive (Gegenuhrzeiger) Drehsinn angenommen. Die Bahngleichung (1) nimmt sodann die Form an:

$$Y' = y_1 + A' X' = \beta [\Delta \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \sqrt{2} \Phi_e + a_e (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e)] - \beta \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e \cdot X'. \quad (1')$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} B &= \Delta \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e + a_e (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e), \\ C &= -\sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und finden durch Koeffizientenvergleichung:

$$y_1 = \beta \cdot B; \quad A' = \beta \cdot C.$$

Setzt man dies und [18m] in Gleichung [42] ein, so erhält man die Bahngleichung der das Magnetfeld verlassenden Teilchen:

$$\begin{aligned} Y'' = & -\beta C a \sin \Phi + \beta B \cdot \frac{\cos (\Phi - \epsilon')}{\cos \epsilon'} \\ & - X'' \left[\beta C \cdot \frac{\cos (\Phi - \epsilon'')}{\cos \epsilon''} + \frac{\beta B}{a} \cdot \frac{\sin (\Phi - \epsilon' - \epsilon'')}{\cos \epsilon' \cos \epsilon''} \right] \\ & + \beta \{ a (1 - \cos \Phi) + X'' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \epsilon'' (1 - \cos \Phi)] \}. \end{aligned}$$

Teilchen verschiedener Geschwindigkeit werden an jener Stelle X'' vereinigt, an welcher Y'' von β unabhängig ist; der Koeffizient von β muß also verschwinden. Löst man nach X'' auf, so erhält man die Geschwindigkeitsfokussierungsbedingung:

$$X'' = \frac{a (1 - \cos \Phi) - C a \sin \Phi + B (\cos \Phi + \operatorname{tg} \epsilon' \sin \Phi)}{C (\cos \Phi + \operatorname{tg} \epsilon'' \sin \Phi) + \frac{B}{a} \cdot \frac{\sin (\Phi - \epsilon' - \epsilon'')}{\cos \epsilon' \cos \epsilon''} - \sin \Phi - \operatorname{tg} \epsilon'' (1 - \cos \Phi)} \quad (4)$$

Ist die Form der Felder gegeben, so kann man aus dieser Gleichung den geometrischen Ort der Punkte berechnen, in denen sich Strahlen verschiedener Geschwindigkeit schneiden.

Verwendet man die Hilfsgrößen g' , g'' und f , so kann man Gleichung (4) auf die Gestalt

$$X'' = g'' + \frac{f^2}{X' - g'} \quad (5)$$

bringen, wobei

$$X' = \frac{-B + a (1 - \cos \Phi)}{C - \sin \Phi - \operatorname{tg} \epsilon' (1 - \cos \Phi)} \quad (6)$$

ist. Gleichung (5) stimmt formal mit der Abbildungsgleichung überein; befindet sich das vom elektrischen Feld entworfene Bild gerade an der durch $X' = A - x''$ bestimmten Stelle, so findet Doppelfokussierung statt. X' ist jedoch aus Gleichung (6) zu berechnen und eine Funktion von a und daher im allgemeinen eine Funktion der Masse M . Andererseits ist die Bildweite beim elektrischen Felde (x'') von der Masse unabhängig. Will man Doppelfokussierung für *alle* Massen, so muß man daher verlangen, daß auch X' von der Masse der Teilchen unabhängig ist und den festen Wert l' hat. Dies ist nur so zu erreichen, daß man die Polschuhbegrenzung und damit den Zusammenhang $\Phi = \Phi(a)$ so wählt, daß sich die Massenabhängigkeit von a und Φ in Gleichung (6) gerade kompensiert.

Multipliziert man die Gleichung (6) mit dem Nenner durch und setzt in ihr

$$K = B + l' \cdot C = a_e \cdot (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e) + \sqrt{2} l'_e \cdot \sin \sqrt{2} \Phi_e;$$

$$K = a_e \cdot \left(1 + \frac{f_e}{l'_e - g_e}\right) = a_e \cdot \left(1 + \frac{l'_e - g_e}{f_e}\right) \quad \{4\}$$

ein, so erhält man die Bedingung für doppelte Fokussierung:

$$K - a \cdot (1 - \cos \Phi) - l' [\sin \Phi + \operatorname{tg} \varepsilon' (1 - \cos \Phi)] = 0, \quad \{5\}$$

die auf etwas anderem Wege bereits früher¹⁾ abgeleitet wurde. Wie aus Gleichung (1) für $x'' = l'_e$ zu sehen ist, bedeutet K die Geschwindigkeitsdispersion des elektrischen Feldes; es gilt die Beziehung

$$y'' = \beta \cdot K.$$

Führt man in Gleichung {5} die Polarkoordinaten $\psi = \frac{1}{2} \Phi$ und $\varrho = 2a \sin \psi$ ein, so erhält man schließlich die Gleichung der Polschuhbegrenzung:

$$\varrho = + \frac{K}{\sin \psi} - \frac{2l'}{\cos \varepsilon'} \cos(\psi - \varepsilon'). \quad \{12\}$$

Die hier entwickelten Formeln gelten zwar ableitungsgemäß nur für gleichsinnige Ablenkung in beiden Feldern; durch eine einfache Überlegung lassen sie sich jedoch auch auf den Fall entgegengesetzter Ablenkung anwenden.

Aus Gleichung

$$a = \frac{c}{H} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot X}{e \cdot \ln \frac{r_1}{r_2}}} \quad \{16\}$$

sieht man, daß bei umgepoltem Magnetfeld a negativ wird; ebenso wird wegen der entgegengesetzten Ablenkung Φ und ψ negativ.

Die Lage der Koordinatensysteme X', Y' und X'', Y'' bleibt erhalten, nur liegt jetzt P (siehe Fig. 1) im Schnittpunkt der *positiven* Y -Achsen. Da sich beim Umpolen des Magnetfeldes am Einfallswinkel nichts ändert, ändert auch ε' das Vorzeichen nicht. Die seinerzeit gegebene Definition, ε sei positiv, wenn n in den ersten Quadranten zeigt, bleibt daher erhalten. Bei entgegengesetzter Ablenkung hat man also in den obigen Formeln bloß für a , Φ und ψ negative Werte einzusetzen.

Von der Richtigkeit dieser Überlegungen kann man sich auch leicht folgendermaßen überzeugen: Legt man in Fig. 1 das Magnetfeld *samt den Begrenzungen* um die X' -Achse um 180° um, so kann man dieses Feld als

¹⁾ Vgl. J. Mattauch u. R. Herzog, l. c. Die in { } gesetzten Formeln wurden mit den gleichen Nummern dieser Arbeit entnommen.

ein umgepoltes mit negativem ε' auffassen (negativ, da jetzt n' im vierten Quadranten von X', Y' liegt). Wir haben also in allen Gleichungen die Vorzeichen von $a, \Phi, \psi, \varepsilon'$ und ε'' zu vertauschen; hierbei bleiben die Vorzeichen von g', g'' und f ungeändert und die Abbildung erhalten, wie dies bei einem derartigen Umklappen der Fall sein muß. In Gleichung [42] ändert jedoch der Faktor von δ das Vorzeichen in Übereinstimmung mit der entgegengesetzten Ablenkung.

Will man die hier entwickelten Formeln {5} und {12} mit den früher abgeleiteten vergleichen, so muß man beachten, daß erstens damals nur entgegengesetzte Ablenkung untersucht wurde, weshalb die Vorzeichen von a, Φ und ψ zu vertauschen sind, und zweitens Y' in entgegengesetzter Richtung angenommen wurde und daher auch das Vorzeichen von ε' zu vertauschen ist; beachtet man dies, so stimmen die Formeln überein.

Anwendungen.

1. Apparatur von K. T. Bainbridge und E. B. Jordan. Bei diesem Massenspektrographen wird die doppelte Fokussierung nur an einer einzigen Stelle der photographischen Platte erhalten. Es wird im folgenden untersucht, wie weit die übrigen Punkte der photographischen Platte von den Kurven entfernt sind, auf denen Richtungs- bzw. Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet. Die Maße sind der Arbeit von Bainbridge und Jordan¹⁾ entnommen; in unserer Schreibweise lauten sie:

$$a_e = 254 \text{ mm}; \quad \Phi_e = \pi/\sqrt{2}; \quad l'_e = 0; \quad A = 440 \text{ mm}.$$

Die mittleren Werte von a und Φ sind: $a_m = 254 \text{ mm}$ und $\Phi_m = \pi/3 = 60^\circ$. Die Polschuhbegrenzung ist gerade, und zwar ist $\varepsilon' = 0$ und für den mittleren Radius a_m ist auch $\varepsilon'' = 0$. Diese gegenseitige Lage der Felder ist auf der maßstabrichtigen Fig. 2 zu sehen.

Abbildung und Dispersion des elektrischen Feldes. Bei dem hier verwendeten Ablenkwinkel rücken alle Kardinalpunkte ins Unendliche; wir haben es daher hier mit dem Spezialfall der teleskopischen Abbildung zu tun. Das Bild des Eintrittsschlitzes liegt hier, wie schon Hughes und Rojansky abgeleitet haben (und wie es auch aus der allgemeinen Gleichung [39] folgt), am Ende des Feldes, also an der Stelle $l''_e = 0$. Ferner findet man aus den Gleichungen (3) und {4}:

$$C = 0; \quad B = K = 2 a_e.$$

¹⁾ K. T. Bainbridge u. E. B. Jordan, l. c.

Abbildung durch das Magnetfeld. Aus Fig. 2 entnimmt man, daß $\Phi = \frac{\pi}{3} + \varepsilon''$ ist. Setzt man dies sowie $\varepsilon' = 0$ in die Gleichungen [45] und [47] ein, so erhält man:

$$g' = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad g'' = a \left(\frac{\cos^2 \varepsilon''}{\sqrt{3}} - \sin \varepsilon'' \cos \varepsilon'' \right); \quad f = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos \varepsilon''. \quad (7)$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $0' 0'' 0_m''$:

$$a = \frac{a_m}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varepsilon''} \quad (8)$$

oder unter Verwendung von {16}:

$$\sin \varepsilon'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{M_0}{M}} - 1 \right). \quad (8')$$

Die Lage der Bilder erhält man schließlich aus der Abbildungsgleichung, die hier lautet:

$$l'' = g'' + \frac{f^2}{a_m \sqrt{3} - g'}. \quad (9)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen wurde die Bildkurve berechnet und in Fig. 2 (gestrichelte Kurve) eingezeichnet.

Vernachlässigt man Glieder höherer Ordnung in ε'' , so erhält man:

$$g' = \frac{a_m}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon'' \right); \quad g'' = \frac{a_m}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}} \varepsilon'' \right); \quad f = \frac{2a_m}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon'' \right); \quad (7')$$

$$l'' = a_m (\sqrt{3} - 5 \varepsilon''). \quad (9')$$

Aus der letzten Gleichung sieht man zunächst, daß für den Mittelstrahl $l'' = a_m \cdot \sqrt{3}$ ist; durch diesen Punkt geht auch tatsächlich die photographische Platte. Außerdem gestattet Gleichung (9') die Berechnung des Winkels δ zwischen Bildkurve und Mittelstrahl. Für kleine Winkel ε'' ist $\overline{QO''} = \overline{QO_m''} = a_m / \sqrt{3}$; daher wird

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon'' \left(\frac{a_m}{\sqrt{3}} + a_m \cdot \sqrt{3} \right)}{a_m \cdot \sqrt{3} - l''} = \frac{4}{5 \cdot \sqrt{3}}.$$

Man findet hieraus $\delta = 24^\circ 47' 29''$; andererseits ist der Winkel zwischen photographischer Platte und Mittelstrahl gleich 30° ; es hat daher den Anschein, als ob man durch Verdrehen der Platte um $5^\circ 12' 31''$ schärfere Bilder bekommen könnte. Wir werden jedoch gleich sehen, daß hierbei die Geschwindigkeitsfokussierung schlechter werden würde.

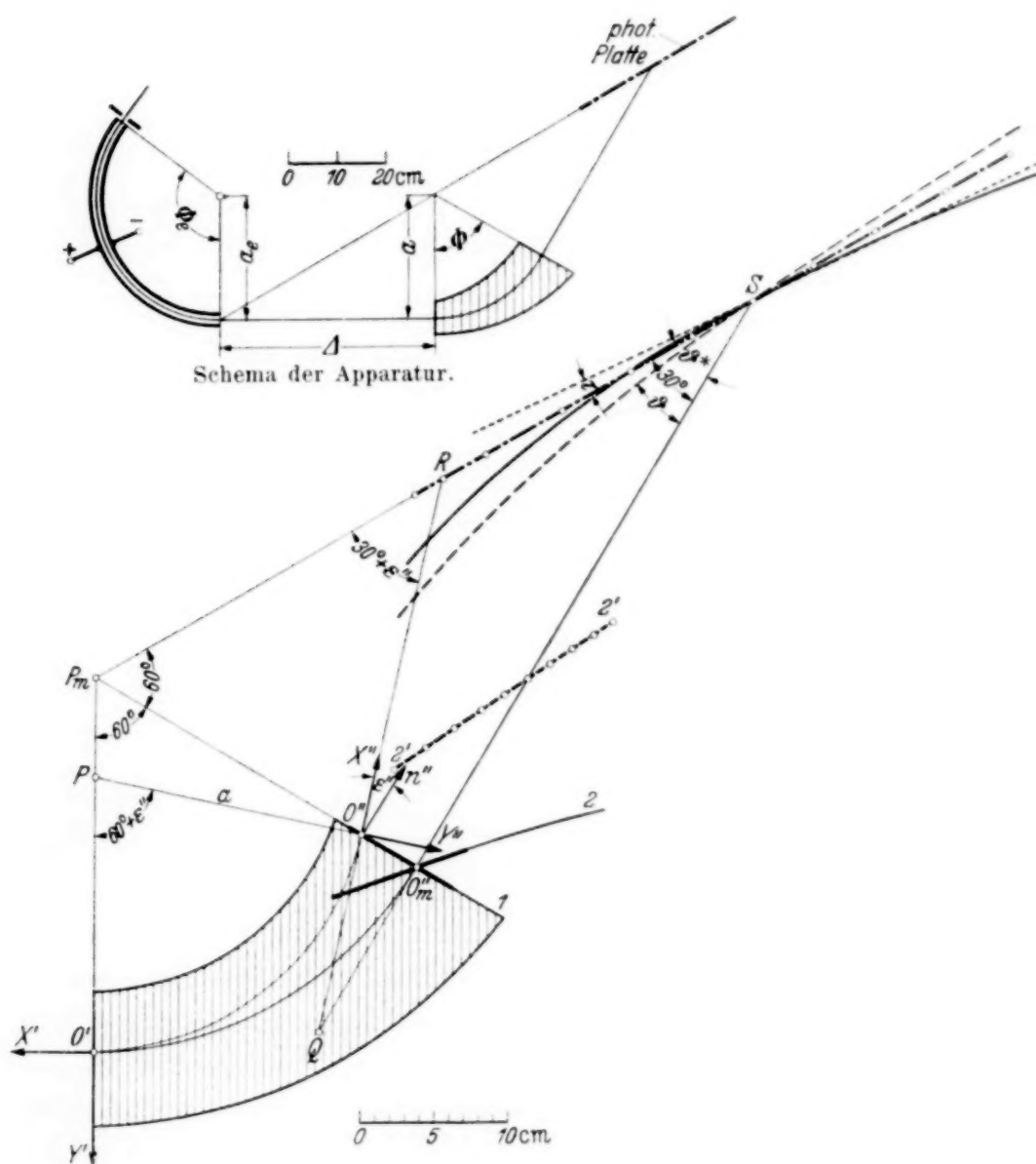


Fig. 2. Apparatur von Bainbridge und Jordan.

- Gerade 1: Tatsächlich realisierte Polschuhbegrenzung,
 - - - - - Lage der photographischen Platte.
 ———— Kurve für Geschwindigkeitsfokussierung,
 - - - - - Kurve für Richtungsfokussierung,
 Kurve für lineare Massenskala.
 Kurve 2: Polschuhbegrenzung für strenge Doppelfokussierung,
 Kurve 2': Kurve der doppelfokussierten Bilder.

Geschwindigkeitsfokussierung. Aus Gleichung (4) findet man für $C = \varepsilon' = 0$ und $\Phi - \varepsilon'' = \pi/3$:

$$X'' = \frac{a \cos \varepsilon'' \left(\frac{2a}{\sqrt{3}(B-a)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varepsilon'' - \sin \varepsilon'' \right)}{1 - \frac{2a}{\sqrt{3}(B-a)} \sin \varepsilon''}.$$

Da $a_e = a_m = B/2$ ist, so findet man aus Gleichung (8)

$$\frac{2a}{\sqrt{3}(B-a)} = \frac{2}{\sqrt{3} + 4 \sin \varepsilon''};$$

setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$X'' = \frac{a_m \cos \varepsilon''}{(\sqrt{3} + 2 \sin \varepsilon'')^2} \cdot [2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cos \varepsilon'' + (4 \cos \varepsilon'' - 3) \sin \varepsilon'' - 4 \cdot \sqrt{3} \sin^2 \varepsilon'']. \quad (10)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wurde die Kurve berechnet, auf der Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet; auch sie ist in Fig. 2 eingezeichnet (ausgezogene Kurve). Für kleine Werte von ε'' erhält man:

$$X'' = a_m \left(\sqrt{3} - \frac{11}{3} \varepsilon'' \right). \quad (10')$$

Analog wie früher findet man nun den Winkel δ^* zwischen Mittelstrahl und Geschwindigkeitsfokussierungskurve aus

$$\delta^* = \arctg \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{11} = 32^\circ 12' 15''.$$

Man sieht hieraus, daß in der Nähe des Doppelfokussierungspunktes die Geschwindigkeitsfokussierungskurve auf der der Bildkurve entgegengesetzten Seite der photographischen Platte liegt.

Die Neigung der photographischen Platte wurde von Bainbridge und Jordan so bestimmt, daß die Massenskala möglichst linear wird; es ist ein besonders günstiger Zufall, daß die so berechnete Lage der Platte (strichpunktierte Gerade) auch zwischen den Kurven für Geschwindigkeits- und Richtungsfokussierung liegt. Da überdies der Schnitt sehr flach erfolgt, so werden auch für jene Punkte der Platte, die vom Mittelstrahl entfernt sind, noch scharfe Bilder erhalten, vorausgesetzt, daß nicht ein zu stark divergentes Bündel oder ein zu großes Energieintervall fokussiert werden soll, was schon wegen der Bildfehler zweiter Ordnung nicht möglich ist.

Massenskala. Die fast lineare Massenskala wird von manchen Autoren¹⁾ als Vorteil gegen die Wiener Anordnung empfunden, bei der die Abstände der Linien von einem Fixpunkt ohne Vernachlässigung der Wurzel aus der Masse proportional sind. Wir können dem jedoch nicht zustimmen, wie im folgenden ausgeführt wird.

Die Massenskala im Falle von Bainbridge und Jordan ergibt sich leicht aus den beiden Dreiecken $PO''P_m$ und $P_mO''R$ der Fig. 2, indem

¹⁾ L. Cartan, Spectrographie de masse, S. 28f. Paris, Hermann & Co., 1937.

man zunächst $\overline{P_m O''}$ aus dem ersten Dreieck und dann $\overline{P_m R} = D$ aus dem zweiten Dreieck berechnet. Man erhält

$$D = a \cdot \frac{\sin(60^\circ + \varepsilon'')}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon'')}{\sin(30^\circ + \varepsilon'')} \quad (11)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (1) von Bainbridge und Jordan, indem man in letzterer $\Theta = \Phi = 60^\circ$ und $\beta = 0$ setzt. Hierbei ist zu be-

achten, daß in unserer Bezeichnung $\psi = -\varepsilon''$, $R_0 = a_m$ und $R_0 \cdot \sqrt{\frac{M}{M_0}} = a$ (vgl. Gleichung {16}) ist. Setzt man hierin Gleichung (8'), die unter den selben Voraussetzungen identisch ist mit Gleichung (2) von Bainbridge und Jordan, ein und spezialisiert auf kleine Werte von $\frac{M - M_0}{M_0} = \gamma$,

so erhält man:

$$D = 2 a_m (1 + \gamma + \frac{1}{32} \gamma^2). \quad (12)$$

Für kleine Werte von γ stellt dies eine nahezu lineare Massenskala dar.

Wie jede Massenskala enthält auch sie noch die von den Feldern abhängige Konstante M_0 , die in γ steckt. Für Präzisionsmessungen verwendet man daher Dubletts, um diese Konstante eliminieren zu können. Dies geschieht hier am besten durch logarithmische Differentiation von Gleichung (12), wobei man erhält:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{(1 + \frac{1}{16} \gamma) \Delta \gamma}{1 + \gamma + \frac{1}{32} \gamma^2}.$$

Setzt man hierin $\Delta \gamma = \frac{\Delta M}{M_0} = \frac{\Delta M}{M} (1 + \gamma)$, was sich leicht aus der Definition von γ ergibt, ein, so erhält man näherungsweise unter Vernachlässigung quadratischer und höherer Glieder in γ :

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta D}{D} \cdot \left(1 - \frac{1}{16} \frac{D - 2 a_m}{2 a_m}\right). \quad (13)$$

Würde Bainbridge und Jordan sich auf die lineare Massenskala verlassen, also in Gleichung (13) das Störungsglied vernachlässigen, so würde an einer Stelle, die 7 cm vom Doppelfokussierungspunkt $D = 2 a_m$ entfernt ist, der Fehler fast 1% betragen. Bei der jetzt erstrebten Genauigkeit von 1:100000 bei der Bestimmung der Isotopengewichte, darf der Fehler bei der Dublettmessung höchstens einige $\frac{1}{100}$ betragen. Da also ein Fehler von 1% nicht in Kauf genommen werden kann, müssen Bainbridge und Jordan sich entweder auf einen noch kleineren Teil der Platte beschränken oder die Störungsglieder berücksichtigen. Im ersteren Falle muß das auszumessende Dublett stets in die nahe Umgebung des Doppelfokussierungs-

punktes gebracht werden, wobei man sich vorher experimentell überzeugen muß, daß in diesem Gebiet die Abweichungen von der Linearität kleiner als die Meßfehler sind. Im zweiten Falle müßte die Massenskala genau wie bei Aston empirisch geeicht werden, wobei die angenäherte Linearität bloß die Interpolation etwas erleichtert.

Bei der Wiener Apparatur entsprechen den Näherungsformeln (12) und (13) die exakten Gleichungen:

$$e = \sqrt{\frac{M}{k}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta M}{M} = 2 \frac{\Delta e}{e},$$

die, wie eine experimentelle Prüfung¹⁾ ergeben hat, für den größten Teil der Platte innerhalb der Fehlergrenzen Gültigkeit haben. Das hat unter anderem den Vorteil, daß die meisten auf *einer* Aufnahme vorgefundenen Dubletts bequem ausgemessen werden können. Hier ist dies besonders wertvoll, da eine Aufnahme den Massenbereich 1:20 (bei Bainbridge und Jordan ist der halbwegs lineare Massenbereich bloß 1:1,3) erfaßt, und die Auflösung infolge der streng erfüllten Doppelfokussierung entlang der ganzen Platte konstant ist.

Um bei Bainbridge und Jordan einen Überblick über die Dispersion im weiteren Verlauf der Platte zu bekommen, wurden die Punkte eingezeichnet, die für fix gewählte Feldstärken im elektrischen und magnetischen Felde den ganzen Massenzahlen 5, 6, . . . , 14 entsprechen. Zur Verbesserung der Linearität könnte man die Platte um den Punkt S der Fig. 2, um einen Winkel τ drehen, der so bestimmt wird, daß das quadratische Glied in Gleichung (12) verschwindet. Eine längere, aber einfache Rechnung ergibt, daß dieser Zweck durch Drehung um $\tau = 1^\circ 4' 2''$ in dem in Fig. 2 angegebenen Sinne erreicht wird. Dieser Winkel wurde in Fig. 2 der Übersichtlichkeit halber etwas größer gezeichnet; die günstigste Stellung der photographischen Platte wurde punktiert; auch jetzt noch liegt sie zwischen beiden Fokussierungskurven.

¹⁾ Vgl. J. Mattauch, l. c.; sowie ZS. f. techn. Phys. **18**, 525, 1937. —

²⁾ *Anmerkung bei der Korrektur:* Die Winkel τ , δ und δ^* erhält man auch leicht aus Tabelle III der kürzlich erschienenen Arbeit von L. Cartan (Journ. d. Phys. et de Rad. **8**, 453, 1938). Es wird dort auf rein geometrische Weise berechnet, wie eine ebene photographische Platte gegenüber einem geradlinig oder kreisförmig begrenzten Polschuh angebracht werden muß, damit für die Mitte der Platte die Massenskala linear wird und sowohl Richtungs- als Geschwindigkeitsfokussierung vorhanden ist. — Auch die hier auf ganz anderem Wege abgeleitete Gleichung (32) stimmt mit Cartans Gleichung (1) von Tabelle IIIb überein, wenn man auf die andere Bezeichnungsweise Rücksicht nimmt.

Doppelfokussierung auf der ganzen Platte. Es war nun von besonderem Interesse zu untersuchen, wie, unter Beibehaltung der mittleren Ablenkwinkel und Bahnradien, das Magnetfeld begrenzt sein müßte, damit für alle Radien Doppelfokussierung auftritt. Man erhält aus Gleichung {12} für $\varepsilon' = 0$, $K = 2 a_m$ und $l' = a_m \cdot \sqrt{3}$ die Gleichung der Polschuhbegrenzung in Polarkoordinaten:

$$\varrho = 2 a_m \cdot \left(\frac{1}{\sin \psi} - \sqrt{3} \cdot \cos \psi \right). \quad (14)$$

Aus den Abbildungsgleichungen ergibt sich ferner, wie in einer folgenden Arbeit ausführlich gezeigt werden soll, die Gleichung der Bildkurve im Koordinatensystem $X' Y'$ in Parameterdarstellung mit Φ als Parameter:

$$\left. \begin{aligned} X' &= 2 a_m \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3} \sin \Phi} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\cos \Phi \sin \Phi}{1 - \cos \Phi} \right), \\ Y' &= 2 a_m \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3} \sin \Phi} \right) \cdot (1 + \cos \Phi). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die nach diesen Gleichungen berechneten Kurven sind ebenfalls in Fig. 2 eingezeichnet. Die Polschuhbegrenzung, die in dem kleinen verwendeten Stück (in der Fig. 2 stark gezeichnet) auch jetzt noch gut durch eine Gerade ersetzt werden kann, ist nun gegen die austretenden Strahlen geneigt. Die Bildkurve liegt wesentlich näher zum Magnetfeld und dementsprechend ist auch die Dispersion wesentlich geringer als bei Bainbridge und Jordan; da überdies die fast lineare Massenskala verlorengeht, ohne daß diese dafür einfach berechenbar wird, erscheint es uns günstiger, die ziemlich glücklich gewählte Anordnung von Bainbridge und Jordan unverändert zu lassen und auf die strenge Fokussierung zu verzichten.

2. Apparatur von Dempster. Ein Jahr vor Bainbridge und Jordan hat bereits Dempster¹⁾ einen Massenspektrographen beschrieben, bei dem an einer Stelle der photographischen Platte Doppelfokussierung erreicht wird. Bei Dempster und auch bei Aston besitzen die Platten des radialen elektrischen Feldes nicht, wie in der elektronenoptischen Theorie angenommen wurde, symmetrische Spannung gegen Erde, sondern in beiden Fällen ist die innere Platte geerdet. Dies bewirkt, daß die Teilchen beim Verlassen des elektrischen Feldes beschleunigt werden und daher das Magnetfeld mit größerer Geschwindigkeit durchlaufen als das elektrische Feld. Die genaue Berechnung ergibt, daß dies zwar Verschiebungen der Bild- sowie der Geschwindigkeitsfokussierung verursacht, die jedoch kleiner

¹⁾ A. J. Dempster, Proc. Amer. Phil. Soc., l. c.

als der Plattenabstand des radialen elektrischen Feldes sind. Es wird daher hier der Einfachheit halber so gerechnet, als ob die Platten symmetrisch geerdet wären; die genauen Werte bei Erdung der inneren Platte wurden ohne nähere Ableitung in Klammern beigefügt.

Der Konstruktion wurden folgende von Dempster¹⁾ angegebenen Maße zugrunde gelegt:

$$a_e = 8,48 \text{ cm}, \quad \Phi_e = \pi/2, \quad l_e'' = A = 5,66 \text{ cm}, \quad l' = 0, \quad \Phi_m = \pi, \\ \varepsilon' = \varepsilon'' = 0.$$

Man findet hieraus:

$$l_e' = 1,0 \text{ cm} (1,1 \text{ cm}), \quad B = 20,0 \text{ cm} (21,0 \text{ cm}), \quad C = -1,125 (-1,16).$$

Wegen der einseitigen Erdung des elektrischen Feldes würde es sich empfehlen, den ersten Schlitz von der nun verwendeten Stelle $l_e' = 1 \text{ cm}$ an die Stelle $l_e' = 1,1 \text{ cm}$ zu versetzen, doch ist die Korrektur so klein, daß wohl kaum eine Verbesserung der Bildschärfe zu bemerken sein wird.

Da $l'' = 0$ ist, fällt die Bildkurve mit der Polschuhbegrenzung zusammen und ist, so wie diese, eine Gerade. Geschwindigkeitsfokussierung findet auf der Geraden

$$X'' = \frac{2a - B}{-C}$$

statt, wie man leicht aus Gleichung (4) sieht. Beide Geraden schneiden einander im Punkte $a = B/2 = 10,0 \text{ cm} (10,5 \text{ cm})$ unter einem Winkel von $41^{\circ}38'$; dies ist die einzige Stelle, wo Doppelfokussierung auftritt. Dempster findet die schärfsten Linien bei $a = 10 \text{ cm}$, was in guter Übereinstimmung mit den obigen Rechnungen ist. Man sieht aus Fig. 3, wo beide Geraden eingezeichnet sind, daß man durch Drehen der Platte um den Schnittpunkt der beiden Fokussierungsgeraden die Geschwindigkeitsfokussierung auf Kosten der Richtungsfokussierung verbessern könnte. Die günstigste Lage der Platte hängt davon ab, wie groß das zu fokussierende Geschwindigkeitsintervall im Vergleich zur Richtungsdivergenz ist.

Es soll noch untersucht werden, wie das Magnetfeld begrenzt sein müßte, damit für alle Radien Doppelfokussierung auftritt. Man findet aus Gleichung {12} für $K = B$:

$$\varrho = \frac{B}{\sin \psi}.$$

Dies ist eine Gerade, die im Abstand B parallel mit dem Eintrittsstrahl verläuft. Das Bild liegt nur für den Radius $a = B/2$ im Endlichen; kleinere

¹⁾ A. J. Dempster, Phys. Rev., l. c.

a geben keinen Schnittpunkt mit der Polschuhbegrenzung, haben also auch kein Bild. Für a größer als $B/2$ liegt das Bild im Unendlichen, da $g' = 0$, also der Gegenstand im vorderen Brennpunkt liegt. Mit einer derartigen Anordnung könnte man zwar bei Verwendung einer Ablenkung um fast 180° und durch großen Abstand Magnet—Platte eine große Dispersion bei leidlich scharfen Linien erhalten, doch wird der flache Austritt der Strahlen aus dem Magnetfeld die praktische Anwendung verhindern.

Die Massenskala ist bei der Dempsterschen Anordnung die gleiche wie bei der Wiener Apparatur, doch ist wegen des steilen Schnittwinkels der beiden Fokussierungsgeraden nur ein verhältnismäßig kleiner Bereich der Platte in der Umgebung des Punktes $a = B/2$ brauchbar.

Die Apparatur von Dempster hat bei gleichem experimentellen Aufwand wie bei dem Massenspektrographen von Mattauch und Herzog den Nachteil, der im allgemeinen recht ungünstigen Geschwindigkeitsfokussierung, sowie jenen Nachteil, daß bei gleicher Dispersion ein größeres Magnetfeld erforderlich ist, denen kein einziger Vorteil gegenübersteht.

3. Apparatur von Aston. Dieser Massenspektrograph unterscheidet sich von den vorstehenden dadurch, daß bei ihm überhaupt keine Richtungs-fokussierung angestrebt, sondern das Hauptgewicht auf eine Geschwindigkeitsfokussierung zweiter Ordnung gelegt wurde. Da es sich jedoch auch bei dieser Anordnung durch passende Wahl des Abstandes Kollimatorschlitz-elektrisches Feld erreichen läßt, daß wenigstens an einer Stelle der Platte Doppelfokussierung stattfindet, wird auch sie in diesem Zusammenhang beschrieben. Die gegenwärtig von Aston verwendete (dritte) Apparatur wurde von Sawyer¹⁾ berechnet und dieser Arbeit wurden die Abmessungen entnommen. Infolge eines Rechenfehlers in Sawyers Arbeit findet jedoch bei der verwendeten Apparatur überhaupt keine genaue Geschwindigkeitsfokussierung, weder erster noch zweiter Ordnung statt. Bereits 1934 hat

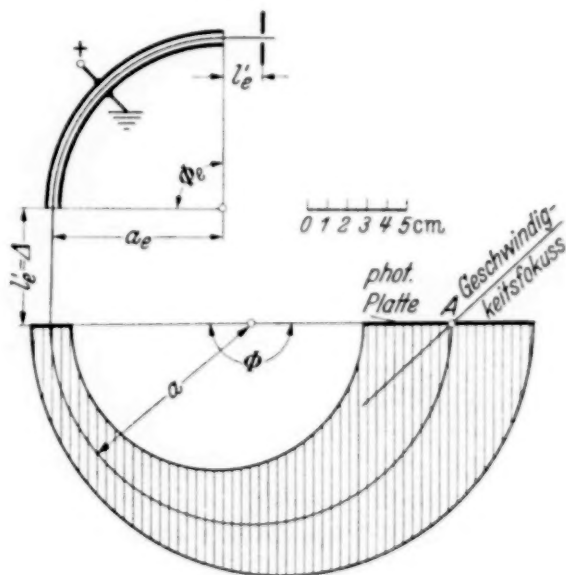


Fig. 3. Apparatur von Dempster.

¹⁾ W. W. Sawyer, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 453, 1936.

der eine von uns¹⁾ darauf hingewiesen, daß es notwendig ist, das Streufeld des radialen elektrischen Feldes zu berücksichtigen, da es eine Änderung der Geschwindigkeit der Teilchen bewirkt, wie dies von Mattauch²⁾ schon 1932 beobachtet wurde. Dessen ungeachtet berechnet Sawyer die Bahn im Magnetfeld unter Zugrundelegung jener Teilchengeschwindigkeit, die knapp vor dem Verlassen des elektrischen Feldes vorhanden ist. Die tatsächlichen Verhältnisse überlegt man sich leicht folgendermaßen: Teilchen mit der Geschwindigkeit v_0 beschreiben im elektrischen Feld eine Kreisbahn mit dem Radius a_e ; wir nehmen der Einfachheit halber an, daß die an den Ablenkplatten liegende Spannung so geerdet ist, daß das Potential für diesen Radius a_e den Wert Null besitzt. Ein rascheres Teilchen, das das elektrische Feld auf der x' -Achse mit $v = v_0 (1 + \beta)$ betritt, beschreibt eine gestrecktere Bahn und verläßt das elektrische Feld an der Stelle

$$y_2 = r - a_e = \beta a_e (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e).$$

An dieser Stelle ist das Potential des elektrischen Feldes nicht mehr Null, sondern $V = y_1 \cdot \frac{M v_0^2}{e a_e}$. Die Geschwindigkeit v_i vor dem Austritt berechnet man aus dem Energiesatz und erhält:

$$v_i = v_0 \left(1 + \beta - \frac{y_2}{a_e} \right) = v \left(1 - \frac{y_2}{a_e} \right) = v [1 - \beta (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e)]. \quad [9]$$

Diese Formel besagt, daß durch das Heranlaufen des positiven Teilchens gegen die äußere positive Platte die Geschwindigkeit verringert wird. Nach Verlassen des elektrischen Feldes befindet sich das Teilchen wieder in einem Raum mit dem Potential 0, besitzt also wieder die Geschwindigkeit v . Es unterscheidet sich also die Geschwindigkeit im *Magnetfeld* von jener, die vor dem Verlassen des *elektrischen* Feldes vorhanden ist, um den Betrag $-\beta v (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e)$. Wie man sieht, ist dieser der ersten Ordnung von β proportional, weshalb die von Sawyer berechnete Anordnung ebenfalls bereits in erster Ordnung falsch ist. Daß auch die Glieder zweiter Ordnung in β nicht stimmen, ist selbstverständlich. Eine exakt durchgeführte Theorie der Geschwindigkeitsfokussierung zweiter Ordnung und deren Anwendung auf die Astonsche Apparatur wird der eine von uns demnächst veröffentlichen. Hier beschränken wir uns auf Glieder erster Ordnung in β .

Es soll zunächst untersucht werden, auf welcher Kurve Geschwindigkeitsfokussierung (erster Ordnung) stattfindet, um zu sehen, wieviel der oben beschriebene Rechenfehler ausgibt. Für ein kreisförmiges Magnetfeld

¹⁾ R. Herzog, l. c. — ²⁾ J. Mattauch, Phys. ZS. **33**, 899, 1932.

mit senkrechtem Ein- und Austritt ($\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$) erhält man aus Gleichung (4):

$$X'' = \frac{a(1 - \cos \Phi) - C \cdot a \sin \Phi + B \cos \Phi}{C \cos \Phi + \left(\frac{B}{a} - 1\right) \sin \Phi}.$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $R = a \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi}$, wobei R den Radius des Magnetfeldes bedeutet, so erhält man:

$$X'' + R = \frac{R \cdot (B - RC)}{B - (B - RC) \cos \Phi - R \sin \Phi}. \quad (16)$$

Diese Gleichung läßt sich auf die Gestalt

$$X'' + R = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\Phi - \varphi)} \quad (16')$$

bringen, die einen Kegelschnitt in den Polarkoordinaten $X'' + R$ und $\Phi - \varphi$ darstellt. Man erhält für den Parameter $2p$ und die numerische Exzentrizität ε die Werte:

$$p = \frac{R}{B} (B - RC) = R - \frac{R^2 C}{B}; \quad (17)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{B} \sqrt{R^2 + (B - RC)^2}. \quad (18)$$

Ferner stellt φ die Richtung der großen Achse dar; man erhält:

$$\cos \varphi = \frac{B - RC}{\sqrt{R^2 + (B - RC)^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (B - RC)^2}}. \quad (19)$$

Die in diesen Gleichungen stets vorkommende Kombination $B - RC$ hat, wie aus der Gleichung (3) ersichtlich ist, den Wert

$$B - RC = (R + \Delta) \sqrt{2} \cdot \sin \sqrt{2} \Phi_e + a_e (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e).$$

Setzt man dies in die obigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\cotg \varphi = \left(1 + \frac{\Delta}{R}\right) \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e + \frac{a_e}{R} (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e), \quad (19')$$

$$\varepsilon = \frac{R}{B \sin \varphi} = \frac{R}{\sin \varphi [\Delta \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \Phi_e + a_e (1 - \cos \sqrt{2} \Phi_e)]}, \quad (18')$$

$$p = R \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi. \quad (17')$$

Aus Gleichung (18') sieht man, daß für kleine Ablenkwinkel Φ_e die Exzentrizität $\varepsilon > 1$ ist, daß also die Kurve, auf der Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet, eine Hyperbel ist; dies ist bei allen Apparaturen der Fall, die

bisher von Aston verwendet wurden. Bei großem Ablenkwinkel im elektrischen Felde ($\Phi_e \approx \pi$) sind jedoch auch die Fälle möglich, wo $\varepsilon \ll 1$ ist, wo also auf einer Parabel oder Ellipse Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet.

Im Falle der Hyperbel ist es von besonderem Interesse, die Asymptoten kennenzulernen, da man meistens die photographische Platte an diese Stelle bringen wird.

Aus Gleichung (16') folgt $X'' = \infty$ für $\Phi = \omega$, wenn

$$\cos(\omega - \varphi) = \frac{1}{\varepsilon}; \quad (20)$$

diese Gleichung bestimmt die Richtung der Asymptote. Ihre Lage ist festgelegt durch den Abstand d des Schnittpunktes der Asymptote mit der X' -Achse vom Mittelpunkt des Magnetfeldes; man erhält hierfür den Wert:

$$d = \frac{p}{\varepsilon \sin(\omega - \varphi) \sin \omega}. \quad (21)$$

Bezeichnet man mit l den Abstand Mitte des elektrischen Feldes bis Mitte des Magnetfeldes, so erhält man für sehr kleine Ablenkwinkel

$$\Phi_e \ll \frac{R}{2l} \ll 1;$$

$$B - RC = l \cdot 2\Phi_e; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{l}{R} \cdot 2\Phi_e;$$

$$\varepsilon = \frac{R}{(l - R) 2\Phi_e}; \quad p = \frac{R \cdot l}{l - R};$$

$$\omega = -2\Phi_e; \quad (20')$$

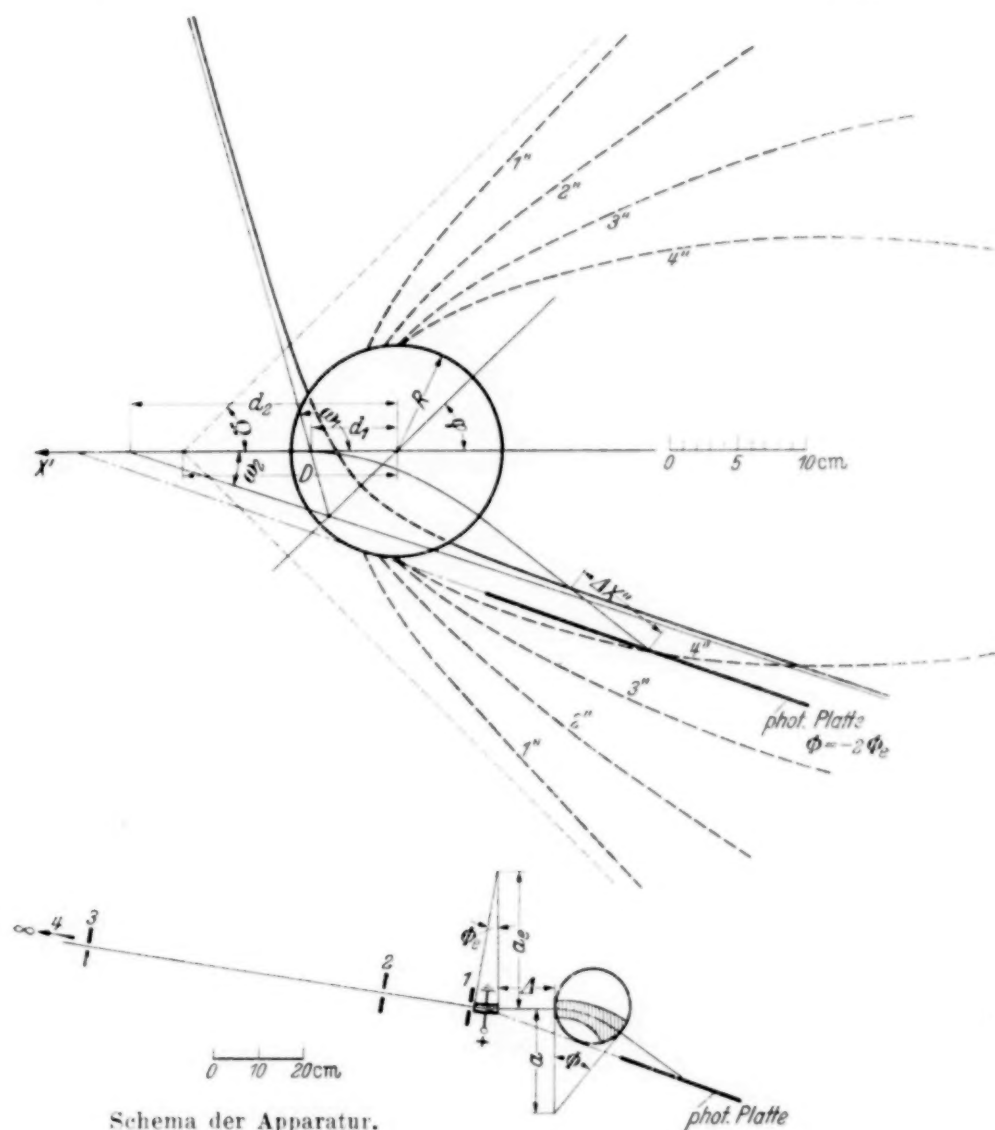
$$d = l. \quad (21')$$

Hieraus sieht man, daß Gleichung (20) eine Verallgemeinerung der Aston'schen Beziehung $\omega = -2\Phi_e$ für beliebig große Winkel darstellt und daß Gleichung (21) der für kleine Winkel bekannten Tatsache entspricht, daß die Asymptote durch den Mittelpunkt des elektrischen Feldes geht.

Wendet man zunächst diese Gleichungen auf Aston's zweite Apparatur¹⁾ an, bei der sich die photographische Platte noch an der Stelle $\omega = -2\Phi_e$ befand, so findet man eine Asymptote, wie sie in Fig. 4 zu sehen ist. Für den Mittelstrahl ($\Phi = -4\Phi_e$) erhält man einen Abstand AX'' des Vereinigungspunktes von Strahlen verschiedener Geschwindigkeit von der

¹⁾ F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **115**, 487, 1927.

photographischen Platte von 7,8 cm! Diese große Abweichung kommt eben daher, daß die tatsächlich verwendeten Ablenkwinkel ($\Phi_e = 10^\circ$ und $\Phi = 40^\circ$) nicht mehr als klein anzusehen sind. Demgegenüber stellt



Schema der Apparatur.

Fig. 4. Astons zweite Apparatur.

- Kurve für Geschwindigkeitsfokussierung,
- - - - - Astons Gerade für Geschwindigkeitsfokussierung und Lage der photographischen Platte,
- - - - - Kurven für Richtungsfokussierung;
- Kurve 1'': $l'_e = 0$, Hyperbel;
- Kurve 2'': $l'_e = 20$ cm, Hyperbel;
- Kurve 3'': $l'_e = 86$ cm = g_e , Parabel;
- Kurve 4'': $l'_e = \text{unendlich}$, Ellipse.

Astons dritte Apparatur, die in Fig. 5 gezeichnet ist, trotz des vorhin beschriebenen Rechenfehlers einen wesentlichen Fortschritt dar. Hier ist für den Mittelstrahl die photographische Platte vom Geschwindigkeits-

Andererseits haben, wie der eine von uns zeigen konnte¹⁾, die elektrischen und magnetischen Streufelder, wenn keine besonderen Blenden zu deren Verminderung verwendet werden, die Eigenschaft, daß sie die Ausdehnung der Felder vergrößern. Dies wird bewirken, daß die Geschwindigkeitsfokussierungspunkte gegen die photographische Platte verschoben werden; leider fehlen in Astons Arbeiten nähere Angaben über die Art der Abschirmung, so daß diesbezüglich keine quantitativen Aussagen gemacht werden können. Auch die Tatsache, daß die innere Platte des radialen elektrischen Feldes geerdet wurde, bewirkt, daß die Geschwindigkeitsfokussierungskurve um den allerdings sehr kleinen Betrag des halben Kondensatorplattenabstandes gegen die photographische Platte verschoben wird. Zusammenfassend kann man sagen, daß die Platte in Astons dritter Apparatur hinsichtlich Geschwindigkeitsfokussierung erster Ordnung günstig liegt. Geschwindigkeitsfokussierung zweiter Ordnung wird jedoch sicherlich nicht stattfinden, da der beschriebene Rechenfehler auf die Glieder zweiter Ordnung einen weit größeren Einfluß ausübt.

In Fig. 4 ist außer den Asymptoten auch die Hyperbel, auf der Geschwindigkeitsfokussierung stattfindet, eingezeichnet (ausgezogene Kurve). Man sieht, daß für die verwendeten Ablenkwinkel die Hyperbel ruhig durch die Asymptote ersetzt werden kann. Der für praktische Zwecke brauchbare Teil der Hyperbel ist voll gezeichnet; jener Teil, der im Magnetfeld liegt, ist punktiert. Man sieht, daß auch positive Ablenkwinkel Φ von 90 bis 120° brauchbar wären.

Bildkurve. Um eine Aussage über die Linienschärfe machen zu können, ist es notwendig, die Lage der Bilder der Kollimatorschlitze zu berechnen. Auch hier haben wir es mit einer Abbildung durch zwei Linsen zu tun. Das elektrische Feld liefert ein Zwischenbild, das sich nach den Formeln [26e], [30e] und [31e] berechnen läßt; dieses wird sodann vom magnetischen Feld abermals abgebildet. Im Falle senkrechten Eintrittes in einen kreisförmigen Polschuh erhält man aus Gleichung [26m]:

$$g = a \cotg \Phi = R \cos \Phi / (1 - \cos \Phi)$$

und aus Gleichung [30m]:

$$f = R / (1 - \cos \Phi);$$

die Abbildungsgleichung für das magnetische Feld lautet daher:

$$[l' (1 - \cos \Phi) - R \cos \Phi] [l'' (1 - \cos \Phi) - R \cos \Phi] = R^2. \quad (22)$$

¹⁾ R. Herzog, Arch. f. Elektrotechn. **29**, 790, 1935; R. Herzog, ZS. f. Phys. **97**, 596, 1935.

Sie läßt sich ebenfalls in der Form

$$l'' + R = \frac{P}{1 - E \cos \Phi} \quad (23)$$

schreiben und stellt also auch einen Kegelschnitt dar, von dem ein Brennpunkt wieder im Mittelpunkt des Magnetfeldes liegt, dessen Achse jedoch nun mit der X' -Achse zusammenfällt. Parameter und Exzentrizität haben die Werte

$$P = R \left(1 + \frac{R}{l'} \right), \quad (24)$$

$$E = 1 + \frac{R}{l'}. \quad (25)$$

Man sieht hieraus, daß die Bildkurve für $l' > 0$ eine Hyperbel, für $l' = \infty$ eine Parabel und für $l' < 0$ eine Ellipse ist; alle drei Fälle sind praktisch möglich.

Im Falle einer Hyperbel erhält man die Richtung Ω der Asymptoten aus

$$\cos \Omega = \frac{1}{E} = \frac{l'}{R + l'}. \quad (26)$$

Den Abszissenabschnitt D , der hier mit der wahren Exzentrizität zusammenfällt, erhält man aus

$$D = \frac{R}{\sin^2 \Omega} = \frac{(R + l')^2}{R + 2l'}. \quad (27)$$

Mit Hilfe dieser Formeln wurden nun für Astons zweite und dritte Apparatur die Bildkurven einiger markanter Schlitzstellungen konstruiert und in Fig. 4 bzw. in Fig. 5 eingezeichnet. Jener Teil der Bildkurven, die im Magnetfeld liegen, wurden der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Man sieht, daß die Kurven 1'' und 2'', auf denen die Bilder der verwendeten Kollimatorschlitze¹⁾ liegen, sehr weit von der photographischen Platte entfernt sind. Viel günstiger liegen die Kurven 3'' und 4'', bei denen die Kollimatorschlitze weit vor dem elektrischen Felde liegen; hier läßt es sich erreichen, daß so wie bei Bainbridge und Jordan oder Dempster wenigstens an einer Stelle Doppelfokussierung stattfindet. Die Bedingung, wann dies eintritt, findet man entweder durch Gleichsetzung der rechten Seiten der Gleichungen (16') und (23) und Auflösung nach l' oder direkt durch Spezialisierung von Gleichung (6). In beiden Fällen erhält man:

$$l' = \frac{-B + R \sin \Phi}{C - \sin \Phi}. \quad (28)$$

¹⁾ Bezüglich der Lage der Kollimatorschlitze bei der 3. Apparatur konnten keine näheren Angaben gefunden werden, weshalb hier angenommen wurde, daß sich die Schlitze an der gleichen Stelle befinden wie bei der 2. Apparatur.

Setzt man für Φ den mittleren Ablenkwinkel ein, und sorgt man dafür, daß das vom elektrischen Feld entworfene Bild an die Stelle l' kommt, so hat man wenigstens für die Mitte der Platte Geschwindigkeits- und Richtungs-fokussierung. Der hierdurch erzielbare Vorteil wird dadurch besonders deutlich, wenn man das Verhältnis Schlitzweite zur Bildweite an der Stelle der Platte berechnet. [Angenommen wurden zwei gleich weite (0,02 mm) Kollimatorschlitze im Abstand von 20 cm, wie sie Aston bei seiner zweiten Apparatur verwendet hat.] Man erhält hierfür den Wert 0,3 für Astons dritte Apparatur bzw. 5,5 für den Fall, daß einer der beiden Kollimatorschlitze in der Entfernung $l'_e = 176$ cm vor dem elektrischen Felde angebracht ist; das Auflösungsvermögen kann daher auf das 16fache gesteigert werden; gleichzeitig wird hierdurch bei gutem Vakuum die Intensität der Linien auf das 16fache erhöht. Trotzdem ist die Intensität infolge der engen und weit entfernten Schlitze noch immer sehr klein, verglichen mit den früher beschriebenen Anordnungen; das große Auflösungsvermögen wird daher, verglichen mit den früher besprochenen Anordnungen, durch Verzicht auf große Intensität erkaufte. Dieses Vorversetzen der Schlitze ist so lange unbedenklich, solange die Bildfehler zweiter Ordnung keine Rolle spielen; für so enge Kollimatorschlitze, wie sie Aston verwendet, ist dies sicher der Fall. Die vielleicht etwas unbequeme Apparatlänge kann dadurch verringert werden, daß man zu größeren Ablenkwinkeln übergeht, was mit Hilfe der genauen Formeln (20) und (21) nun leicht möglich ist. Auf jeden Fall ist es jedoch empfehlenswert, bei der bestehenden Apparatur den Abstand Schlitz–elektrisches Feld so groß wie möglich zu machen, was sicher ohne allzu tief gehende Änderung der Anordnung möglich ist.

Massenskala. Auch Aston trachtet so wie Bainbridge und Jordan zur Erleichterung der Interpolation seine Messungen in jenem Gebiet der photographischen Platte auszuführen, in dem die Massenskala möglichst linear ist. Aston und Fowler¹⁾ haben experimentell und theoretisch gefunden, daß bei Ablenkwinkeln in der Nähe von $\Phi = 2\omega = -4\Phi_e$ der Abstand D einer Linie vom Fußpunkt des Lotes vom Magnetfeldmittelpunkt auf die photographische Platte proportional der Masse ist. Stellt man $D = D(M)$ als Kurve dar, so bedeutet diese Proportionalität, daß jener Punkt gesucht wurde, in dem eine durch den Ursprung gelegte Gerade die Kurve tangiert. Da nicht einzusehen ist, warum D gerade vom Fußpunkt des Lotes gemessen werden soll, und da für jeden anderen Ausgangs-

¹⁾ F. W. Aston u. R. H. Fowler, Phil. Mag. 43, 514, 1922.

punkt der Messung auch ein anderer Berührungspunkt der Tangente erhalten wird, entbehrt die Rechnung von Aston und Fowler einer tieferen Grundlage.

Das, was vielmehr von Interesse ist, ist die Kenntnis jener Stelle der photographischen Platte, an welcher die Massenskala angenähert linear ist, also die Kurve $D = D(M)$ einen Wendepunkt oder eine Berührung höherer Ordnung hat. Die Bedingung hierfür lautet: $\frac{d^2 D}{dM^2} = 0$. Wir bezeichnen mit $\bar{\omega}$ den Winkel der photographischen Platte mit der X' -Achse; solange die Platte sich auf der Asymptote befindet, ist $\bar{\omega} = \omega$; bei großen Ablenkwinkeln wird es jedoch besser sein, die Platte möglichst der Hyperbel selbst anzuschmiegen. Ferner bezeichnen wir mit q die Länge des Lotes vom Magnetfeld-Mittelpunkt auf die photographische Platte. Dann gilt

$$D = q \cotg(\Phi - \bar{\omega}) \quad (29)$$

und aus $\tg \frac{\Phi}{2} = \frac{R}{a} = \sqrt{\frac{M_0}{M}}$ erhält man:

$$M = M_0 \cotg^2 \frac{\Phi}{2}. \quad (30)$$

Den oben erwähnten Differentialquotienten als Funktion von Φ erhält man aus

$$\frac{d^2 D}{dM^2} = \frac{\frac{d^2 D}{d\Phi^2}}{\left(\frac{dM}{d\Phi}\right)^2} + \frac{\frac{dD}{d\Phi}}{\frac{dM}{d\Phi}} \cdot \frac{d}{d\Phi} \left(\frac{1}{\frac{dM}{d\Phi}} \right).$$

Setzt man hierin die Gleichungen (29) und (30) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 D}{dM^2} = \frac{q}{2M_0^2} \cdot \frac{\sin^5 \Phi / 2}{\sin^3(\Phi - \bar{\omega}) \cos^3 \Phi} \cdot [2 \sin \bar{\omega} - \sin(\Phi - \bar{\omega})(2 - \cos \Phi)]. \quad (31)$$

Lineare Skala ist vorhanden, wenn die eckige Klammer gleich Null ist; dies ist der Fall, wenn:

$$\tg \bar{\omega} = \frac{\sin \Phi_L (2 - \cos \Phi_L)}{2 + \cos \Phi_L (2 - \cos \Phi_L)}. \quad (32)$$

Um bei gegebener Platte, also gegebenem $\bar{\omega}$, den Ablenkwinkel Φ_L zu berechnen, bei dem die Massenskala linear ist, bedient man sich am ein-

fachsten der Fig. 6, in der die Gleichung (32) graphisch dargestellt ist. Da für kleine Winkel $\Phi_L \approx 3\bar{\omega} \approx -6\Phi_e$ ist, sieht man, daß die lineare Massenskala erst bei viel größeren Ablenkswinkeln erreicht werden kann, als Aston und Fowler angenommen haben. Um dieses Gebiet noch zu erfassen, müßte die photographische Platte weit gegen das Magnetfeld verlängert werden, was allerdings wieder mit einer Verringerung der Dispersion verbunden wäre. Auch in diesem Falle bleiben jedoch die schon bei Bainbridge und Jordan beschriebenen Mängel gegenüber der quadratischen Massenskala bei der Wiener Anordnung bestehen.

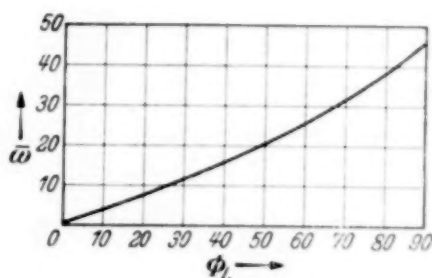


Fig. 6. Ablenkswinkel bei dem die Massenskala linear ist.

Zusammenfassung.

1. Es wird für eine allgemeine Kombination elektrisches Radialfeld –homogenes Magnetfeld die Kurve berechnet, auf der sich Strahlen verschiedener Geschwindigkeit schneiden (Geschwindigkeitsfokussierungsbedingung). Unter Hinzunahme der Abbildungseigenschaften der Felder erhält man hieraus die früher abgeleitete Bedingung für Doppelfokussierung. Dadurch wird es möglich, die Verhältnisse auch bei denjenigen Anordnungen theoretisch zu klären, die nicht, wie der für alle Massen doppelfokussierende Massenspektrograph von Mattauch und Herzog, einen einfachen Spezialfall der allgemeinen Theorie darstellen.

2. Für die von Bainbridge und Jordan verwendeten Felder wurden die Kurven für Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung berechnet und in Fig. 2 gezeichnet. Der Schnitt beider Kurven erfolgt ganz flach und die photographische Platte liegt zufällig dazwischen. Eine Abänderung der Polschuhform derart, daß Doppelfokussierung gleichzeitig für alle Massen stattfindet, ist hier unzuweckmäßig, da die Dispersion verringert werden würde. Die Massenskala wird eingehend untersucht und mit jener der Wiener Anordnung verglichen.

3. Auch für die von Dempster verwendeten Felder wurden die Kurven für Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung berechnet und in Fig. 3 gezeichnet. Es sind dies hier zwei Geraden, die einander unter steilem Winkel schneiden; durch Verdrehen der Platte können unter Umständen schärfere Linien erhalten werden. Ferner wird der Einfluß der unsymmetrischen Erdung der Platten des elektrischen Feldes beschrieben.

4. Astons zweite und dritte Apparatur wurden miteinander verglichen und es wurde gezeigt, daß bei der letzteren Apparatur trotz einer unerlaubten Vernachlässigung in der Arbeit von Sawyer, die sich jedoch erst bei noch größeren Ablenkswinkeln stark auswirken würde, die photographische Platte günstiger liegt als bei der zweiten Apparatur. Dies rührt davon her, daß die der Berechnung der zweiten Apparatur zugrunde gelegte Astonsche Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung nur für ganz kleine Winkel richtig ist; da tatsächlich mittlere Ablenkswinkel von 40° verwendet wurden, sind die Abweichungen bereits beträchtlich. Eine Verallgemeinerung der Astonschen Geschwindigkeitsfokussierungsbedingung für beliebig große Ablenkswinkel wurde berechnet. Es wurde ferner gezeigt, daß bei zentralem Eintritt und kreisförmigen Polschuhen sowohl die Kurve für Geschwindigkeits- als auch jene für Richtungsfokussierung ein Kegelschnitt ist, von dem ein Brennpunkt mit dem Mittelpunkt des Magnetfeldes zusammenfällt. Durch Vergrößerung des Abstandes Kollimatorschlitz—elektrisches Feld würde sich die Intensität und Auflösung bis auf das 16fache des jetzigen Wertes dadurch steigern lassen, daß für einen Punkt der Platte Doppelfokussierung erreicht wird. Die große Apparaturlänge könnte man vermeiden, indem man zu größeren Ablenkswinkeln übergeht, was nun, da die hier abgeleiteten Bedingungen für Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung für beliebige Winkel gültig sind, ohne weiteres möglich ist. Schließlich wird untersucht, für welche Ablenkswinkel die Massenskala linear ist und festgestellt, daß dies erst bei viel größeren Winkeln der Fall ist, als man bisher annahm.

Herrn Prof. Mattauch danken wir bestens für das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse und manche wertvollen Ratschläge.

Wien, Vereinigtes I. und II. Physikalisches Institut der Universität.

Sind neue Verbesserungen im Bau von Elektrometern noch möglich?

Von **Eligio Perucca** in Turin.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Januar 1938.)

Ein neues Elektrometer (Schaufelelektrometer) wird beschrieben, welches eine so große Empfindlichkeit wie die besten schon bekannten Elektrometer erreicht, und in bezug auf die mechanischen Qualitäten die anderer Elektrometer übertrifft. Nach einem ähnlichen Prinzip kann man sehr einfach die Empfindlichkeit und die mechanischen Qualitäten gewöhnlicher Elektrometer merklich steigern.

1. Die Arbeiten von Hoffmann und Zipprich¹⁾ zeigen, daß jede mechanische Verbesserung im Bau des Elektrometers einen wirklichen Vorteil in der Verwendung dieses Apparates bieten kann.

Deshalb glaube ich, daß die Beschreibung eines neuen Elektrometers, welches die Vorteile der Elektrometer von Hoffmann und von Perucca zusammenfaßt, einiges Interesse für die Physiker haben wird.

Das neue Elektrometer (Schaufelelektrometer) wurde schon vor zwei Jahren von der Firma Dr. Carl Leiss, Berlin-Steglitz, gebaut und ist seit jener Zeit hier zu Versuchszwecken, um die besten Erfolgsbedingungen zu finden.

2. Die dabei gesammelten Erfahrungen erlauben nunmehr auch die günstigen Bedingungen für den Bau der Nadel festzulegen. Man kann sagen, daß das neue Instrument hinsichtlich Festigkeit, Unempfindlichkeit gegen Stöße beim Transport, Einfachheit der Benutzung, die Vorteile des alten Peruccaschen Elektrometers²⁾ mit der hohen nützlichen Kapazität (d. h. der Koeffizient der elektrostatischen gegenseitigen Induktion zwischen Nadel und Hilfsspannungsplatten) des Hoffmannschen Elektrometers vereinigt.

Das neue Elektrometer ist ein Duantenelektrometer, in welchem die von Perucca vorgeschlagene Nadel $LLOF_2F_3$ (Fig. 1), wie eine „Schaufel“ geformt ist, und durch das unzerbrechliche und elastische Torsionsfadensystem $g_1E_1OE_2g_2$ getragen wird.

Die „Schaufel“ ist aus dem Blättchen LL und dem „Arm“ $F_1F_2OF_3$, welcher die notwendige Starrheit besitzt, gebildet. I ist ein Zeiger, um die Drehung der Nadel durch ein Ablesemikroskop M zu beobachten. Der Zeiger wird durch einfallendes Licht in der Richtung KM beleuchtet. Die Nadel kann aber auch mit einem Spiegel R versehen werden, wenn man

¹⁾ G. Hoffmann, Phys. ZS. **37**, 35, 1936; B. Zipprich, ebenda **37**, 36, 1936. — ²⁾ E. Perucca u. C. Leiss, ZS. f. Phys. **49**, 604, 1928.

Als Klebemittel zwischen F_2 und LL und zwischen I und F_3 , und als Gegengewicht in π waren dagegen kleine Lacktöpfchen benutzt.

Schließlich wurde die Nadel durch Kathodenzerstäubung vergoldet, um die notwendige Leitfähigkeit von LLF_2OF_1 zu erhalten, und den Volta-Effekt zwischen LL und P_1P_2 zu beseitigen.

Ein Versuch, die Schaufel aus Metall (Al) herzustellen, verursachte Schwierigkeiten, da es nicht möglich war, die Strecke F_2F_3 des „Armes“ genügend geradlinig zu erhalten. Andererseits erfordert die Beseitigung des Volta-Effektes zwischen LL und P_1P_2 in jedem Falle die Vergoldung.

Die Empfindlichkeit des Elektrometers (z. B. bei Nadelschaltung, d. h. Hilfsspannung \pm Volt an den Duanten P_1P_2) hängt von der Hilfsspannung und von dem Abstand zwischen „Schaufel“ LL und Duanten P_1P_2 ab. Sie kann bis zu ∞ erhöht werden. Die Grenze der Empfindlichkeit ist doch durch die Einstellungsschnelligkeit der Nadel und die Beständigkeit der Nullpunktstelle bestimmt. Man hat bis zur Empfindlichkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ Volt/Skalenteil mit einem Abstand $P_1P_2 - LL$ von 0,1 mm, einer Hilfsspannung von ± 15 Volt, einer Einstellungsschnelligkeit von 3 sec, Mikroskopvergrößerung 80, Mikrometerskala im Okular ± 50 Teilen. Mit einem größeren Torsionsfaden f_1f_2 kann man dieselbe Empfindlichkeit erreichen und eine Einstellungsschnelligkeit von 1 sec haben; die Hilfsspannung müßte dann aber bis zu ± 40 Volt gesteigert werden. Das Elektrometer ist auch mit einem Objektiv versehen, welches eine Vergrößerung von etwa 400 hat; mit dieser Vergrößerung steigt die Empfindlichkeit in dem angegebenen Beispiel auf $1 \cdot 10^{-4}$ Volt/Skalenteil.

Die Ständigkeit der Nullpunktsslage war bei so hohen Empfindlichkeiten nur noch durch die Unbeständigkeit der Spannung in den Akkumulatoren für die Hilfsspannung bestimmt.

Die Kapazität von m_1m_2LI war ~ 4 cm, wenn der Abstand $LL - P_1P_2 = 0,1$ mm war. Die Kapazität von $m_1m_2f_1f_2OF_3$ war ~ 2 cm; die nützliche Kapazität (d. h. der Koeffizient der gegenseitigen elektrostatischen Induktion zwischen LL und P_1P_2) war ~ 2 cm.

Man konnte dieses Elektrometer auch als Vakuumelektrometer bauen, dadurch würde zweifellos weitere Steigerung der Empfindlichkeit bei einer gegebenen Einstellungsschnelligkeit erreicht.

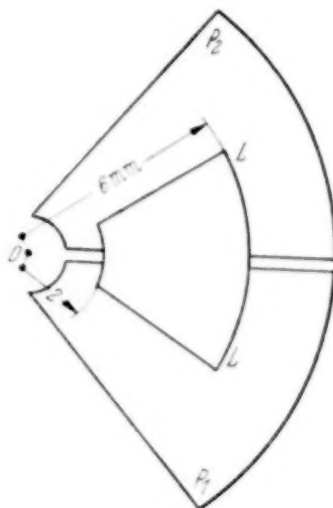


Fig. 2.

Infolge der guten Ergebnisse, welche ich mit dem normalen „Luftapparat“ erhalten habe, scheint mir aber, daß man auf diese mit Kosten verbundene Verbesserung verzichten kann.

Wichtig für das gute Gelingen der Nadel ist: Große Planheit des Glimmerplättchens, damit dasselbe die größtmögliche Verminderung des Abstandes $LL - P_1P_2$ bis auf weniger wie 0,1 mm erlaubt.

Durch die konsequente Erhöhung der Kapazität zwischen LL und P_1P_2 , welche eine hohe ponderomotorische elektrostatische Kraft erzeugt, und die Möglichkeit, einen ziemlich großen Wollaston-Draht f_1f_2 zu benutzen, wird auch eine höhere Einstellungsschnelligkeit erreicht.

Diese Tatsache und das minimale Gewicht der Schaufel ($IF_3 O LL F_2 F_1$ wiegt nicht einmal 1 mg) machen das Instrument unempfindlich gegen Stöße und erlauben eine ebenso sichere Handhabung des Apparates wie die eines Zeigergalvanometers.

Der elektrische Widerstand der Leitung $m_1 O LL$ (oder $m_2 O LL$) übertrifft nicht 100 Ω . Dies ist die Folge der Benutzung eines großen Wollaston-Drahtes. Ein Quarztorsionsfaden würde weniger zerbrechlich sein, aber die Vergoldung durch Kathodenzerstäubung kann sich mit der Zeit bisweilen unterbrechen und damit der Gebrauch des Elektrometers in Frage gestellt werden.

Die hohe Leitfähigkeit der neuen Nadel ist ein wirklicher Vorteil, wenn man das Elektrometer bei Hochfrequenzmessungen benutzt.

3. Die im vorstehenden erwähnten Vorteile sind in der Tat die Folge des elastischen Torsionssystems $E_1 f_1 f_2 E_2$, welche gleichzeitig die hohe Empfindlichkeit des Torsionsfadens f_1f_2 und die Unzerbrechlichkeit der elastischen Aufhängung bietet. Ein solches elastisches Torsionssystem dürfte in ähnlichen Massen bei Anwendung von vielen anderen physikalischen Vorrichtungen Vorteile bieten. So z. B. für ein einfaches Einblatt-elektroskop nach Kolbe (Fig. 3).

MM ist die Platte, auf welcher das Al- oder Au-Blatt hängt. $E_1 f_1 f_2 E_2$ ist der elastische Torsionsfaden. E_1 und E_2 bieten die notwendige Elastizität und sind einfache Messingdrähte von 6 mm Länge und 0,1 mm Durchmesser, f_1f_2 ist ein metallischer Torsionsfaden von etwa 2 cm Länge.

Im Mittel O von f_1f_2 ist ein kurzes Stück AB von Al angelötet: $AB = 6$ mm; $AO = 5$ mm; $OB = 1$ mm; Breite von $AB = 2$ mm; Dicke $\sim 0,05$ mm. Auf OB ist das Al-Blatt BC des Elektroskops angeklebt. Länge 30 mm; 2 mm breit, 5 μ Dicke. Das genaue Gleichgewicht der Torsionsnadel erhält man durch ein passendes Gegengewicht π bei A .

Die Nadel ist ohne weiteres leitend, indem die Verbindungen zwischen E_1 und f_1 , E_2 und f_2 , AB und f_1f_2 , BC und AB alle mit Aquadag gemacht werden.

Eine solche Nadel habe ich in ein zylindrisches Gehäuse eines älteren Exner-Elektrometers von Leybold eingesetzt.

Mit f_1f_2 aus Wollaston-Draht von $6\ \mu$ Durchmesser erreichte ich eine Drehung der Nadel von $\sim 45^\circ$ ($MOC = \sim 45^\circ$) mit 30 Volt zwischen M und dem Gehäuse.

Wenn ich E_1E_2 als starre Arme gemacht habe und das elastische Torsionssystem in einfacher Weise durch einen spiralförmigen Wolframdraht, wie man ihn in den Doppelspiral-Osram¹⁾-Glühlampen benutzt, ersetzt habe, so habe ich doch noch eine Drehung von 45° mit nur 150 Volt zwischen M und dem Gehäuse erhalten.

Ein solch einfaches Elektrometer ist außerordentlich widerstandsfähig und dabei so empfindlich, daß ein kleiner Haken in C nützlich war, um die Adhäsion zwischen Blatt und Platte MM zu vermindern.

Durch die Verwendung eines spiralförmigen Torsionsfadens wird die Biegeelastizität an Stelle der Torsionelastizität verwertet. Eine einfache Überlegung ergibt, daß in diesem Falle eine höhere Empfindlichkeit im Vergleich zu einem Torsionsfaden vom gleichen Durchmesser und gleicher Länge erreicht wird. Ein spiralförmiger Torsionsfaden ist geeignet, eine größere Verwendbarkeit zu finden. Als größter Vorteil ist seine elastische Dehnungsfähigkeit zu betrachten, durch die eine außerordentliche Unzerbrechlichkeit erreicht wird.

Torino (Italia), Laboratorio di Fisica Sperimentale R. Politecnico.

¹⁾ Solche spiralförmigen Wollaston-Drähte habe ich freundlichst von der Firma Osram in Mailand bekommen. Der Wolframdraht hat nur $8\ \mu$ Durchmesser. Die Schraubwindung hat einen Durchmesser von nur $60\ \mu$.

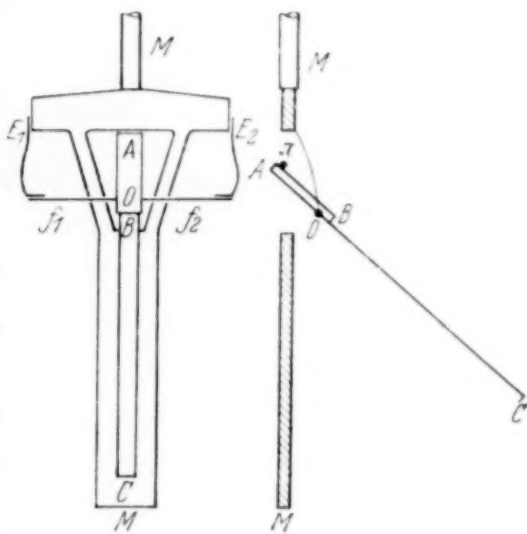


Fig. 3.

Lichtanregung durch Korpuskeln von kleiner Geschwindigkeit.

Von **Alojzy Kotecki** in Posen (z. Z. in Leipzig).

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 21. Januar 1938.)

Es wurde die Anregungsfunktion beim Stoß von Wasserstoffteilchen auf Wasserstoff, Quecksilber, Argon und Helium — beim Stoß von Argonteilchen auf Wasserstoff und Quecksilber ermittelt. Ein für Anregungszwecke ausgearbeiteter Kapillar-Niedervoltbogen diente als Ionenquelle. Die Anregungsvorgänge wurden im Bereich von 1000 bis 6000 Volt Teilchenspannung untersucht. In allen Fällen regen vor allem die neutralen Teilchen an mit Ausnahme der Stöße von Wasserstoff auf Helium. Die Lichtausbeute fällt in allen Fällen mit kleiner werdender Teilchenspannung. Auf Grund des Beobachtungsmaterials wird dann die Arbeitshypothese von Döpel geprüft.

Einleitung. Im Gegensatz zu den Anregungs- und Ionisationsvorgängen beim Elektronenstoß, die allgemein theoretisch geklärt sind, finden wir die Verhältnisse bei Atom- und Ionenstoß aus verschiedenen Gründen viel schwieriger. Die bisher aufgestellten Theorien vermögen eine allgemeine gültige Klärung der gegenseitigen Anregung bzw. Ionisierung beim Stoß von neutralen Atomen nicht zu geben.

Döpel¹⁾ hat versucht, auf Grund der vorhandenen Untersuchungen ein anschauliches Stoßmodell aufzuführen, das sich bei zahlreichen Korpuskularstoßerscheinungen gut bewährt hat und das als Arbeitshypothese gewisse experimentelle Untersuchungen zu klären vermag.

Da das Beobachtungsmaterial infolge experimenteller Schwierigkeiten beschränkt ist, kann die Döpelsche Arbeitshypothese nicht genug allseitig geprüft werden. Die üblich angewandte Apparatur, das Kanalstrahlrohr, gibt mit kleiner werdender Spannung immer kleinere Ionenströme, so daß die Untersuchungen unter 10 kV aus Intensitätsgründen schwer durchzuführen sind. Man hat sich bemüht, diese Schwierigkeiten zu beseitigen. Es wurde eine Apparatur ausgearbeitet, bei der die Ionen aus einem Kapillar-Niedervoltbogen gewonnen werden. Diese Apparatur entspricht im Prinzip der von Tuve, Dahl und Haftstad²⁾ für Atomzertrümmerungs- und der von Lamar³⁾ für Massenspektrographenuntersuchungen verwandten.

Die Anregungsvorgänge wurden im Bereich von 1000 bis 6000 Volt untersucht. Es wurde mit Wasserstoffkorpuskeln Wasserstoff, Quecksilber,

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1933. — ²⁾ M. A. Tuve, Phys. Rev. **48**, 241, 1935. — ³⁾ K. S. Lamar, ebenda **48**, 886, 1935.

Argon und Helium — mit Argonkorpuskeln Argon, Wasserstoff und Quecksilber angeregt. Auf Grund des Beobachtungsmaterials ist dann die Arbeitshypothese von Döpel geprüft worden.

Apparaturbeschreibung und Versuchsbedingungen. Zur Bestimmung der Anregungsfunktion der untersuchten Gase im erwähnten Spannungsbereich hat sich die im folgenden beschriebene Apparatur (Fig. 1) als sehr nützlich erwiesen. Als Ionenquelle diente ein Niedervoltbogen, der in einem Stahlgehäuse (*S*) brannte. In der Mitte verengte sich das Gehäuse zu einer Kapillare (*L*) von 3,5 mm Durchmesser und 18 mm Länge. Die Glühkathode (*K*) befand sich in einem 14 mm weiten zylindrischen Raum des

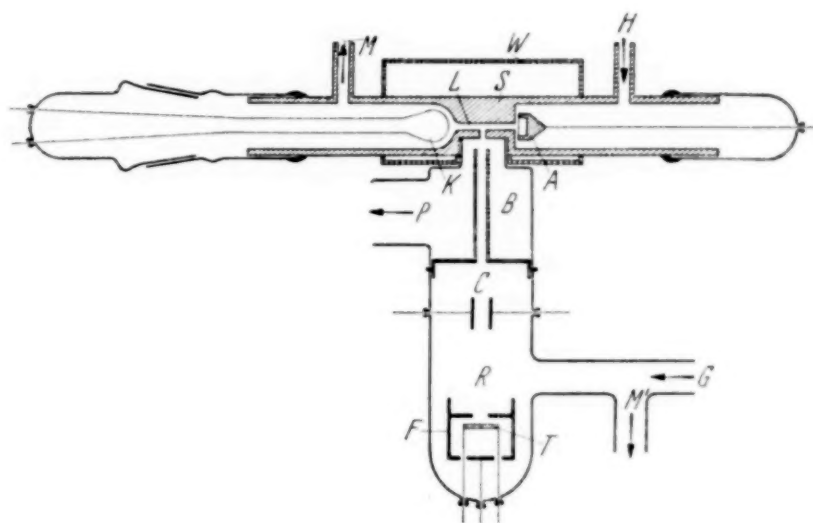


Fig. 1. Korpuskularstrahlapparatur.

Stahlgehäuses. Die Kathode wurde mittels eines Schliffes angesetzt, so daß sie beim Versagen bequem herausgezogen werden konnte. Der entsprechende Teil des Schliffes war an das Stahlgehäuse mit Picein gekittet. Das Glasstück, das die becherförmige Anode (*A*) hielt, wurde direkt mit Picein an das Stahlgehäuse befestigt. Um ein Erwärmen der Kittstellen zu vermeiden, wurde das Stahlgehäuse mit einer Wasserkühlung (*W*) versehen. In der Kapillare befand sich eine seitliche Bohrung von 2,2 mm Durchmesser und 2 mm Länge. Durch diese wurden die Ionen aus dem Entladungsraum mit Hilfe einer Spannung, die an das Stahlgehäuse und die Beschleunigungselektrode (*B*) angelegt war, herausgezogen. Die Elektrode bestand aus einem 58 mm langen und 4 mm weiten Stahlrohr und war vom Gehäuse 4 mm entfernt.

Unterhalb der Beschleunigungselektrode befand sich der Beobachtungsraum (*R*), der mit dem oberen Raum nur durch den Kanal der Beschleunigungselektrode verbunden war. Um das Durchdiffundieren der untersuchten

Gase vom Beobachtungsraum in den Bogenraum zu verhindern, war die Beschleunigungselektrode mit Löchern versehen, durch welche ein noch besseres Abpumpen durch den Stutzen (*P*) möglich war. Die Verbindung zwischen Gehäuse und Beobachtungsraum wurde durch ein Glasrohr, das an das Stahlgehäuse mit Picein aufgekittet war, hergestellt. Um beim Kitten kein Picein in das Innere gelangen zu lassen, hatte das Glasrohr einen Hals, der bis zum Grund der Vertiefung im Stahlgehäuse reichte. Im oberen Teil des Beobachtungsraumes befand sich ein Kondensator (*C*); sein Plattenabstand betrug 6 mm und seine Länge 15 mm. Am unteren Ende des Beobachtungsraumes befand sich ein mittels eines Schliffes angesetzter Auffänger (*F*) mit eingebautem Thermoelement (*T*).

Abgepumpt wurde durch den Stutzen (*P*) mit einer dreistufigen Leyboldschen Quecksilberstrahlpumpe, und der Hg-Dampf wurde durch flüssige Luft ausgefroren. Der zur Aufrechterhaltung des Bogens nötige Wasserstoff wurde in einem Kippschen Apparat erzeugt und von einem Vorratsgefäß von 10 Liter durch ein Schraubenventil dem Entladungsraum an der Anodenseite durch den Stutzen (*H*) zugeführt. Der Druck im Bogenraum schwankte zwischen 0,025 und 0,05 mm und wurde so klein gewählt, daß der Bogen noch aufrechterhalten werden konnte. Der Druck wurde mit einem Mac Leodschen Vakuummeter gemessen, welches an den Stutzen (*M*) angeschlossen war.

Die für den Bogen benötigte Spannung stammte aus dem 220 Volt-Gleichstromnetz. Der Bogen wurde durch Kurzschließen des Stahlgehäuses mit der Anode gezündet. Mit Hilfe eines Widerstandes wurde der Bogenstrom zwischen 0,3 bis 2,5 Amp. variiert. Der Spannungsabfall am Bogen schwankte zwischen 50 bis 100 Volt. Das Stahlgehäuse hatte gegen die Kathode ein Potential, das ungefähr die Hälfte der Bogenspannung betrug. Die nötige Beschleunigungsspannung bis 6000 Volt konnte aus einer Hochspannungsmaschine entnommen werden.

Das untersuchte Gas wurde von einem Vorratsgefäß durch ein Schraubenventil zum Beobachtungsraum durch den Stutzen (*G*) eingeführt. Der Druck im Beobachtungsraum schwankte zwischen 0,015 und 0,005 mm und wurde mit dem Mac Leodschen Vakuummeter, das mit dem Beobachtungsraum durch den Stutzen (*M'*) verbunden war, gemessen. Bei Untersuchung des Quecksilberdampfes genügten einige Tropfen Quecksilber im Grunde des Beobachtungsraumes.

Zur Ablenkung der Ionen aus dem Wege der neutralisierten Ionen sowie auch zur Bestimmung des Verhältnisses der geladenen zu den ungeladenen Teilchen wurde im Beobachtungsraum zwischen den Kondensator-

platten ein elektrisches Feld aufrechterhalten. Es genügte dazu eine Spannung von 1000 Volt, die über einen Widerstand von $2 \cdot 10^4$ Ohm an die Platten angelegt wurde.

Die Intensität des Ionenstromes hängt von verschiedenen Faktoren, wie vom Druck im Bogenraum, Heizstrom, vor allem aber vom Bogenstrom und von der Beschleunigungsspannung ab. Für jede Beschleunigungsspannung gibt es eine optimale Bogenstromstärke, bei der der Ionenstrom die größte Intensität besitzt. Man erhält verhältnismäßig beträchtliche Ionenströme, die mit der Beschleunigungsspannung wachsen; bei 1000 Volt konnte man unter besten Bedingungen einen Ionenstrom von 0,1 mA, bei 5000 Volt von 1,5 mA und bei 9000 Volt einen Strom von sogar 5 mA messen. Eine große Anzahl der Teilchen wird umgeladen. In Abhängigkeit vom Druck konnte der Ionenanteil von 10 bis 60% variiert werden. Die Thermospannung erreichte unter besten Bedingungen bei 5000 Volt Teilchen-spannung 15 mV, bei 1000 Volt dagegen $2 \cdot 10^{-4}$ mV.

Auf eine magnetische Trennung des Teilchenstromes mußte verzichtet werden, da die dazu nötigen Mittel nicht zur Verfügung standen. Der Teilchenstrom wurde deshalb unzerlegt zur Anregung benutzt. Man hatte also ein Gemisch von Atomen, Molekülen, Atom- und Molekülionen. Hingegen ist anzunehmen, daß die Energie der Teilchen bei dieser Anordnung recht gleichmäßig ist, da die Ionen im Kapillarbogen erzeugt werden und die ganze angelegte Beschleunigungsspannung durchlaufen, während sie bei einem gewöhnlichen Kanalstrahl durch die gleiche Spannung erzeugt und beschleunigt werden.

Zur Untersuchung diente ein Dreiprismenglasspektrograph von Zeiss mit einem Öffnungsverhältnis von etwa 1:2, dessen Dispersion etwa 100 Å/mm bei 4861 Å und 50 Å/mm bei 4100 Å betrug. Am geeignetsten erwiesen sich die blauempfindlichen Agfa-Platten, und bei Helium die grünempfindlichen.

Methode. Um die Anregungsfunktion einer Spektrallinie, d. h. die Abhängigkeit der Intensität einer Spektrallinie von der Energie des anregenden Teilchens zu ermitteln, muß die relative Intensität der Linie sowie die relative Zahl der anregenden Teilchen bestimmt werden. Dividiert man die relative Intensität der Spektrallinie durch die relative Zahl der anregenden Teilchen, so erhält man die relative Lichtausbeute eines stoßenden Teilchens mit einem belanglosen, von der Spannung unabhängigen Faktor.

Die Intensität der Spektrallinien wurde auf dem photographisch-photometrischen Wege ermittelt, indem Intensitätsmarken mit Hilfe eines Stufenabschwächers von Zeiss auf jede Platte aufgedruckt wurden. Als

Lichtquelle wurde dazu eine Quecksilberbogenlampe benutzt. Die Auswertung der erhaltenen Aufnahmen erfolgte mit einem Mikrophotometer nach Zeiss.

Die relative Teilchenspannung wurde aus der Thermospannung und der Voltenergie der Teilchen bis auf eine von der Spannung abhängige Konstante folgendermaßen bestimmt: Wenn n die Zahl der pro Sekunde auffallenden Teilchen, V die von ihnen durchlaufende Spannung, e die Elementarladung, T die erzeugte Thermospannung, R und A Konstanten bezeichnen, dann ist

$$n e V = R T,$$

also

$$n = \frac{R T}{e V} \quad \text{oder} \quad n = \frac{A T}{V}.$$

Ist am Plattenkondensator keine Spannung angelegt, so wird die gesamte Teilchenzahl bestimmt, d. h. die

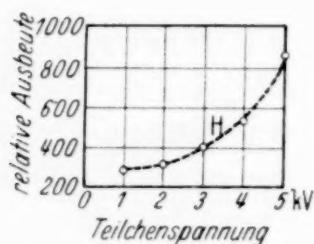


Fig. 2. Anregungsfunktion der Wasserstofflinie 4861 Å beim Stoß von Wasserstoffteilchen auf Wasserstoff.

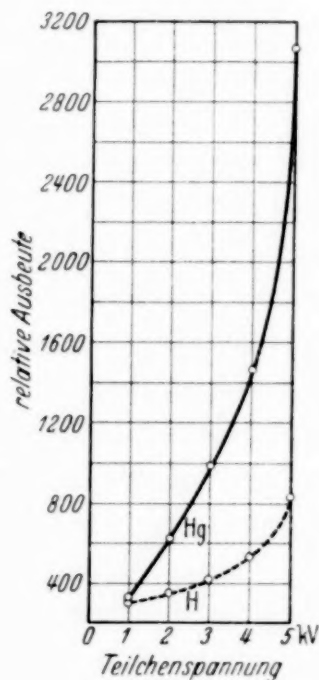


Fig. 3. Anregungsfunktion der Quecksilberlinie 4358 Å und der Wasserstofflinie 4340 Å beim Stoß von Wasserstoffteilchen auf Quecksilber und Wasserstoff.

der neutralen und geladenen Teilchen. Beim eingeschalteten elektrischen Feld werden die geladenen Teilchen abgelenkt, so daß nur die neutralen Teilchen auf das Thermoelement treffen. Infolge der Unschärfe der Meßmethoden bei der Bestimmung der Teilchenzahl sowie bei der Photometrie muß eine Fehlergrenze von ungefähr 20% zugelassen werden.

Anregung von Wasserstoff durch Wasserstoffteilchen. Der Wasserstoff wurde mit Wasserstoffteilchen von 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 Volt angeregt. Die Aufnahmen wurden mit einer Belichtungszeit von 15 Minuten gemacht. Man kann auf der Platte folgende Linien der Balmer-Serie beobachten: 4861,5, 4340,6, 4101,9, 3970 und 3889,1 Å. Bei kleiner werdender Teilchenspannung werden die letzten Serienglieder aus Intensitätsgründen

auf der Platte nicht mehr bemerkt. Es wurde die Anregungsfunktion für die Spektrallinien 4861,5 Å (Fig. 2) und 4340,6 Å (Fig. 3) ermittelt. Wie aus dem Verlauf der Kurven ersichtlich ist, fällt die Ausbeute mit kleiner werdender Teilchenspannung; beide Kurven verlaufen ähnlich. Man konnte noch bei 700 Volt Teilchenspannung ein ziemlich starkes Leuchten des Wasserstoffs im Beobachtungsraum sehen. Beim eingeschalteten elektrischen Feld konnte man keine Spur von Leuchten auf dem Wege der abgelenkten geladenen Teilchen beobachten. Der Wasserstoff wird also im untersuchten Bereich vor allem durch neutrale Teilchen angeregt.

Anregung von Quecksilber durch Wasserstoffteilchen. Der Quecksilberdampf wurde mit Wasserstoffteilchen von 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 Volt angeregt. Die Aufnahmen wurden mit einer Belichtungszeit von 15 Minuten gemacht. Die hierbei auf den einzelnen Spektrogrammen erhaltenen Linien sind in Tabelle 1 angeführt. Die Anregung von Hg durch Wasserstoffteilchen wird praktisch durch neutrale Teilchen bewirkt. Ermittelt wurde die Anregungsfunktion der Spektrallinie 4358,3 Å (Fig. 3). Wie aus dem Verlauf der Kurve ersichtlich ist, fällt die Ausbeute mit kleiner werdender Teilchenspannung.

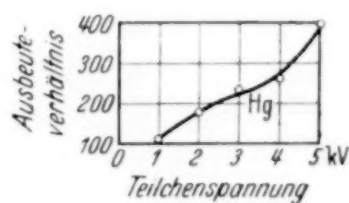


Fig. 4. Ausbeuteverhältnis der Quecksilberlinie 4358 Å zu der Wasserstofflinie 4340 Å in Abhängigkeit von der Wasserstoffteilchenspannung.

Tabelle 1. Angeregte Quecksilberlinien durch Wasserstoffteilchen.

Wellenlängen	Termbezeichnung nach Grotrian	Wellenlängen	Termbezeichnung nach Grotrian
4358,3 Å	$2p_2-2s$	4077,8 Å	$2p_2-2s$
4347,5 Å	$2P-4D$	4046,5 Å	$2p_3-2s$
4108 Å	$2P-4S$		

Da im Beobachtungsraum auch genügend Wasserstoff, der durch die Beschleunigungselektrode durchdiffundierte, vorhanden war, war es möglich, die Änderung der Ausbeute mit der Teilchenspannung bei Quecksilber und Wasserstoff miteinander zu vergleichen. Wie aus der Fig. 3, welche die Ausbeute der Wasserstofflinie 4340 Å und der Quecksilberlinie 4358 Å darstellt, ersichtlich ist, steigt die Ausbeute bei Quecksilber stärker als bei Wasserstoff. Noch besser veranschaulicht den Vorgang die Fig. 4, wo das Ausbeuteverhältnis der beiden Linien bis auf einen belanglosen konstanten Faktor in Abhängigkeit von der Teilchenspannung dargestellt

ist. Bei 1000 Volt Teilchenspannung beträgt die Ausbeute für Quecksilber 106% und bei 5000 Volt 400% derjenigen des Wasserstoffs.

Prüfung der Döplerschen Theorie auf Grund der experimentellen Untersuchungen des Stoßes von Wasserstoffteilchen auf Wasserstoff und Quecksilber. Es ist beim Stoß zweier Korpuskeln weder die relative Geschwindigkeit noch die kinetische Energie allein für die Anregung maßgebend. Die Wirkung ist eine Funktion der für die Übertragung in Frage kommenden Energie. Die vom stoßenden Atom auf das gestoßene Atom übertragbare Energie besteht aus zwei Teilen: erstens aus der Energie des frei zu denkenden Leuchtelektrons des stoßenden Atoms und zweitens aus einem Bruchteil „ K “ der kinetischen Energie des Atomrumpfes, welcher von der Elektronenbindungsenergie und den Massen der beiden Stoßpartner abhängt. Bedeutet also m_1 die Masse des Leuchtelektrons des stoßenden Atoms, M_1 die Masse des stoßenden Atoms, M_2 die Masse des gestoßenen Atoms, v die Relativgeschwindigkeit der beiden Stoßpartner, E_1 die Anregungs- bzw. Ionisierungsenergie des stoßenden Atoms, E_2 die Anregungs- bzw. Ionisierungsenergie des gestoßenen Atoms, so wird die übertragbare Energie $W_{1 \rightarrow 2}$ dargestellt durch:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{m_1 v^2}{2} + K_{1 \rightarrow 2} \frac{M_1 v^2}{2},$$

worin

$$K_{1 \rightarrow 2} = f(E_1, E_2, M_1, M_2).$$

Dabei ist

$$K_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{für} \quad E_1 \ll E_2$$

und

$$K_{1 \rightarrow 2} \leq \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{für} \quad E_1 \geq E_2.$$

Die Funktion geht also im Falle $E_1 \ll E_2$ in eine Geschwindigkeitsfunktion und für den Fall $E_1 > E_2$ in eine Energiefunktion über, wo nur ein Bruchteil K der gesamten kinetischen Energie wirksam ist.

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkt die Anregungsfunktion der H-Linie 4340 Å und der Hg-Linie 4358 Å, so sehen wir, daß, wenn noch

$$K_{1 \rightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

gesetzt wird, sich folgendes bei Atomstoß ergibt:

$$W_{H \rightarrow H} = \frac{m v^2}{2} + q_{H \rightarrow H} \frac{1}{1+1} \cdot \frac{v^2}{2},$$

$$W_{H \rightarrow Hg} = \frac{m v^2}{2} + q_{H \rightarrow Hg} \cdot \frac{200}{200+1} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Es ist also, wenn zunächst $q_{H \rightarrow H} = q_{H \rightarrow Hg}$ gesetzt wird,

$$W_{H \rightarrow H} < W_{H \rightarrow Hg}.$$

Die übertragbare Energie beim Stoß von $H \rightarrow Hg$ ist größer als beim Stoß von $H \rightarrow H$. Es müßte also das Quecksilber stärker angeregt werden als der Wasserstoff, wenn sie gleiche Anregungsspannungen hätten. Da aber

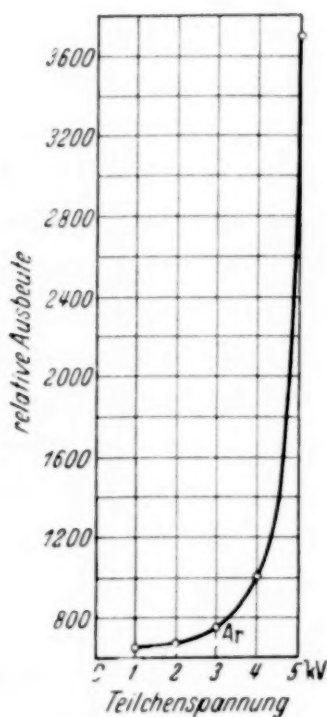


Fig. 5. Anregungsfunktion der Argonlinie 4258 Å beim Stoß mit Wasserstoffteilchen auf Argon.

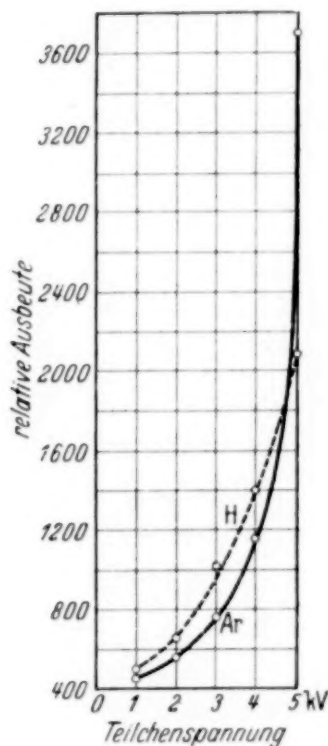


Fig. 6. Anregungsfunktion der Argonlinie 4158 Å und der Wasserstofflinie 4102 Å beim Stoß mit Wasserstoffteilchen auf Argon und Wasserstoff.

das Quecksilber eine niedrigere Anregungsspannung besitzt als der Wasserstoff und daher $q_{H \rightarrow Hg} > q_{H \rightarrow H}$, sind die Bedingungen für Quecksilberanregung noch günstiger.

Der größere Ausbeutezuwachs mit wachsender Teilchenspannung bei Quecksilber gegenüber Wasserstoff würde also mit der Döpelschen Arbeitshypothese im Einklang stehen.

Bei den vorliegenden Versuchsbedingungen können wir aber auch mit Wasserstoffmolekülen zu tun haben. In diesem Falle würden die Verhältnisse infolge der Dissoziation des Moleküls viel schwieriger als beim Atomstoß liegen. Es müßte noch die zur Dissoziation des Moleküls nötige Energie berücksichtigt werden. Im Zusammenhang damit wäre beim Stoß auf Wasserstoffmoleküle eine kleinere Ausbeute zu erwarten als beim Stoß auf Wasserstoffatome.

Die Berücksichtigung der Moleküle als stoßende Teilchen läßt vermuten, daß infolge der kleineren Geschwindigkeit sowie infolge der eventuellen Dissoziation der Teilchen die übertragbare Energie kleiner sei als bei Atomstoß.

Anregung von Argon durch Wasserstoffteilchen. Das Argon wurde mit Wasserstoffteilchen von 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 Volt angeregt. Die Aufnahmen wurden mit einer Belichtungszeit von 20 Minuten gemacht. Die hierbei auf den einzelnen Spektrogrammen erhaltenen Linien stimmen mit den in der von Junkelmann¹⁾ publizierten Arbeit ange-

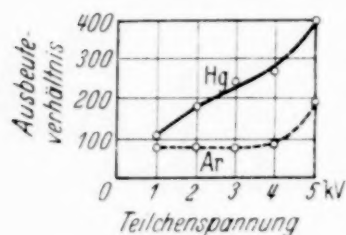


Fig. 7. Ausbeuteverhältnis der Argonlinie 4158 Å und der Quecksilberlinie 4340 Å zu der Wasserstofflinie 4102 Å in Abhängigkeit von der Wasserstoffteilchenspannung.

gebenen Linien überein. Ermittelt wurde die Anregungsfunktion der Spektrallinie 4258 Å (Fig. 5) und 4158 Å (Fig. 6). Die Ausbeute fällt mit kleiner werdender Teilchenspannung. Einen Vergleich mit der Wasserstoffausbeute gibt die Fig. 6 und noch anschaulicher die Fig. 7 wieder, in welcher das Ausbeuteverhältnis der Argonlinien 4158 Å und der Wasserstofflinie 4102 Å dargestellt ist. Wir sehen, daß bei 1000 Volt Teilchenspannung die Ausbeute für Argon 80% und bei 5000 Volt 187% derjenigen des Wasserstoffs beträgt.

Auf Grund der Arbeitshypothese könnten wir im Grenzfall unter großer Annäherung beim Stoß auf Wasserstoff- und Argonatome folgende Gleichungen aufstellen:

$$W_{H \rightarrow H} = \frac{1}{2} m v^2 + q_{H \rightarrow H} \frac{1}{1+1} \frac{v^2}{2},$$

$$W_{H \rightarrow Ar} = \frac{1}{2} m v^2 + q_{H \rightarrow Ar} \frac{40}{40+1} \frac{v^2}{2},$$

$$W_{H \rightarrow H} < W_{H \rightarrow Ar}.$$

Auch hier ist die übertragbare Energie beim Stoß von Wasserstoffteilchen auf Wasserstoff kleiner als beim Stoß auf Argon; die Anregungsspannung für Argon liegt aber höher als bei Wasserstoff. Die Beobachtungen zeigen einen größeren Ausbeutezuwachs mit der Teilchenspannung bei Argon als bei Wasserstoff, aber einen kleineren als bei Quecksilber (Fig. 7).

Hier kann jedoch auch Anregung durch Molekülstoß stattfinden. Die Berücksichtigung der Moleküle als stoßende Teilchen läßt vermuten, daß infolge der kleineren Geschwindigkeit, die die Moleküle im Vergleich mit

¹⁾ R. Junkelmann, ZS. f. Phys. **106**, 586, 1937.

Atomen erlangen, sowie infolge der eventuellen Dissoziation der Moleküle die übertragbare Energie kleiner ist als bei Atomstoß.

Was die gestoßenen Moleküle betrifft, so ist zu vermuten, daß infolge der Dissoziation der Wasserstoffmoleküle die Ausbeute bei Wasserstoff herabgesetzt werden kann. Der Molekülanteil an den Anregungsprozessen müßte also eine Verminderung der Ausbeute bewirken.

Anregung von Helium durch Wasserstoffteilchen. Im weiteren Verlauf der Versuche wurden die Anregungsvorgänge beim Stoß mit Wasserstoffteilchen auf Helium untersucht. Bekanntlich fand Döpel, daß die Anregung des Heliums bei einem aus Protonen und Atomen bestehenden Strahl praktisch durch die neutralen Atome erfolgt.

Mit der oben beschriebenen Apparatur wurde nun auch Helium mit Wasserstoffteilchen von einer Spannung von 1800 bis 5000 Volt angeregt und das bemerkenswerte Resultat erzielt, daß das Helium vor allem durch geladene Wasserstoffteilchen angeregt wird, was im Widerspruch mit den Beobachtungen von Döpel steht. Bei visueller Beobachtung sieht man den Strahl unterhalb und oberhalb der Kondensatorplatten purpurrot leuchten. Beim Einschalten des elektrischen Feldes ändert der Strahl seine Farbe; unterhalb der Platte leuchtet er mit dem Wasserstoff entsprechenden rötlichen Licht; auf dem Wege des abgelenkten Strahles sieht man das blaugrüne Leuchten des Heliums. Über den Kondensatorplatten leuchtet der Strahl purpurrot.

Bei einer Belichtungszeit von 10 Minuten kann man auf den Platten alle im betrachteten Bereich vorhandenen Heliumlinien stark sehen. Die relative Intensität in Abhängigkeit von der Teilchenspannung wird für die Heliumlinie 5016 Å sowie für die Wasserstofflinie 4861 Å ermittelt (Fig. 8). Die Fig. 9 gibt das Intensitätsverhältnis der Linien 5016 Å zu der Linie 4861 Å bis auf einen belanglosen konstanten Faktor in Abhängigkeit von der Teilchenspannung wieder¹⁾. Bei 1800 Volt Teilchenspannung beträgt die Intensität der Heliumlinie 65% und bei 5000 Volt 45% derjenigen der Wasserstofflinie.

Der größere Intensitätszuwachs bei der Wasserstofflinie gegenüber der Heliumlinie könnte eine Klärung darin finden, daß beim Stoß von neutralen Teilchen die übertragbare Energie im Verhältnis zur Anregungs-

¹⁾ Es ist eigentlich schwer, einen Vergleich zwischen den Intensitäten der Helium- und Wasserstofflinien zu machen, da beim Helium vor allem Ionen, beim Wasserstoff neutrale Teilchen anregen. Da sich aber das Verhältnis der geladenen zu den ungeladenen Teilchen wenig mit der Teilchenspannung ändert, kann ein solcher Vergleich zugelassen werden.

energie bei Wasserstoff schneller ansteigt als bei Helium. Die Lichtanregung durch Ionenstoß, die bei Helium vor allem in Betracht kommt, nimmt mit der Teilchenspannung ab; denn es ist zu vermuten¹⁾, daß wir uns im untersuchten Bereich auf dem absteigenden Ast der Anregungsfunktion für Protonen befinden.

Der Grund der Unvereinbarkeit meiner Beobachtungen mit denen von Döpel ist wohl darin zu suchen, daß in meinen Versuchen vielleicht in überwiegender Mehrzahl Molekülionen vorhanden waren, welche infolge

Dissoziation Protonen von genügend kleiner Energie für die Anregung von Helium schaffen könnten.

Das Beobachtungsmaterial bei Heliumanregung wird viel zur Klärung der Stoßprozesse beitragen können; jedoch sind noch weitere Untersuchungen mit homogenisierten Korpuskularstrahlen dazu nötig.

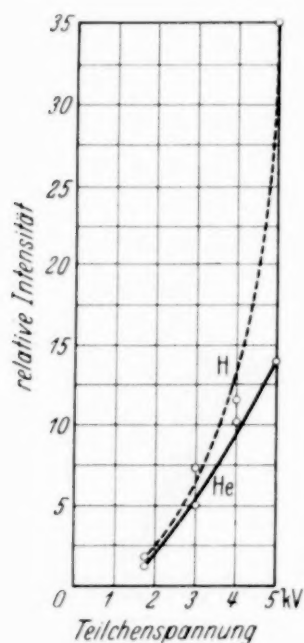


Fig. 8. Relative Intensität der Heliumlinie 5016 Å und der Wasserstofflinie 4861 Å in Abhängigkeit von Wasserstoffteilchenspannung.

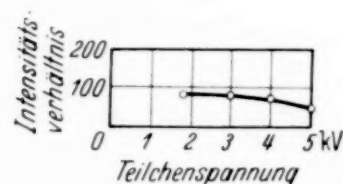


Fig. 9. Intensitätsverhältnis der Heliumlinie 5016 Å zu der Wasserstofflinie 4861 Å in Abhängigkeit von Wasserstoffteilchenspannung.

Argonteilchen. Um Argonionen zu gewinnen, brannte im weiteren Verlauf der Versuche der Bogen in einer Argonatmosphäre. Es wurde die oben beschriebene Versuchsanordnung beibehalten. Erwähnenswert ist der Umstand, daß die Argonionen im Wasserstoff und in der Quecksilberatmosphäre stark umgeladen werden. Der Ionenanteil im Teilchenstrahl war stark herabgesetzt, so daß man praktisch mit einem Atomstrahl zu tun hatte. Diese Erscheinung ist durch kleine Geschwindigkeit der Argonionen zu klären.

Anregung von Wasserstoff durch Argonteilchen. Der Wasserstoff wurde mit Argonteilchen von 2000, 3000, 4000 und 5000 Volt Spannung angeregt.

¹⁾ R. Döpel, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1933.

Die Aufnahmen wurden auf blauempfindlichen Agfa-Platten mit einer Belichtungszeit von 20 Minuten gemacht. Man kann auf der Platte neben den Argonlinien folgende der Balmerieserie sehen: 4861,5, 4340,6, 4101,9, 3970, 3889,1 Å. Ermittelt wurde die Anregungsfunktion der Spektrallinie 4341,9 Å. Wie aus der Fig. 10 ersichtlich ist, wächst die Ausbeute von 3000 bis 5000 Volt Teilchenspannung sehr stark, nämlich von 16 bis 1000. Bei 1000 Volt Teilchenspannung konnte man sogar bei zweistündiger Belichtungszeit nur geringe Spuren auf der Platte beobachten.

Anregung von Quecksilber durch Argonteilchen. Das Quecksilber wurde mit Argonteilchen von 2000, 3000, 4000, 5000 und 6000 Volt Spannung

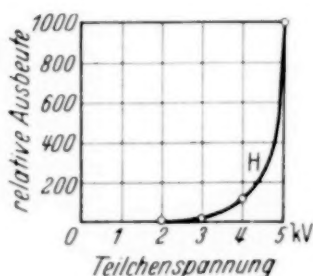


Fig. 10. Anregungsfunktion der Wasserstofflinie 4341 Å beim Stoß von Argonteilchen auf Wasserstoff.

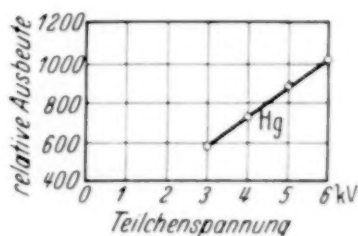


Fig. 11. Anregungsfunktion der Quecksilberlinie 4358 Å beim Stoß von Argonteilchen auf Quecksilber.

angeregt. Die Aufnahmen wurden mit einer Belichtungszeit von 30 Minuten gemacht. Auf der Platte konnte man die Linien 4358 und 4046 Å stärker sehen; die anderen Quecksilberlinien sowie die Argonlinien treten schwach auf. Das Quecksilber wird im allgemeinen schwach angeregt; bei 2000 Volt Teilchenspannung konnten auf der Platte nur Spuren der Linie 4358 Å bemerkt werden. Die Fig. 11 gibt uns die Anregungsfunktion der Linie 4358 Å wieder.

Diskussion der experimentellen Ergebnisse des Stoßes von Argonteilchen auf Wasserstoff und Quecksilber auf Grund der Döpelschen Arbeitshypothese. Wie schon bemerkt wurde, regen die Argonteilchen viel schlechter als die Wasserstoffteilchen an. Wir wollen diese Erscheinung an Hand der Döpelschen Arbeitshypothese überlegen. Da das Argonatom eine 40 mal größere Masse als das Wasserstoffatom oder eine 20 mal größere Masse als das Wasserstoffmolekül besitzt, erlangen die Argonionen bei derselben Teilchenspannung eine viel kleinere Geschwindigkeit als die Wasserstoffionen. Die übertragbare Energie ist also beim Stoß mit Argon kleiner als mit Wasserstoff im untersuchten Bereich. Es ist klar, daß dies in der Intensität der angeregten Linien zum Ausdruck kommen muß.

Was die Ausbeute beim Stoß von $\text{Ar} \rightarrow \text{H}$ und $\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}$ anbelangt, so finden wir, daß der Ausbeutezuwachs im Falle $\text{Ar} \rightarrow \text{H}$ viel größer ist als im Falle $\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}$. Für die übertragbare Energie können wir im Grenzfalle beim Atomstoß folgende Gleichungen schreiben:

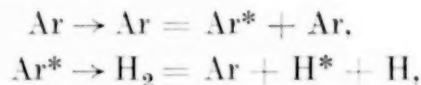
$$W_{\text{Ar} \rightarrow \text{H}} = \frac{m v^2}{2} + q_{\text{Ar} \rightarrow \text{H}} \frac{1}{40 + 1} \frac{40 v^2}{2},$$

$$W_{\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}} = \frac{m v^2}{2} + q_{\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}} \frac{200}{200 + 40} \frac{40 v^2}{2},$$

$$W_{\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}} > W_{\text{Ar} \rightarrow \text{H}}.$$

Es ist also die übertragbare Energie beim Stoß $\text{Ar} \rightarrow \text{Hg}$ größer als beim Stoß $\text{Ar} \rightarrow \text{H}$. Da außerdem die Anregungsspannung des Hg kleiner ist als bei H, wäre zu erwarten, daß der Ausbeutezuwachs bei Quecksilber größer sein müßte als bei Wasserstoff. Im Falle der Stöße $\text{Ar} \rightarrow \text{H}_2$ müßte eigentlich der ansteigende Ast der Anregungsfunktion zu höherer Teilchenspannung verschoben werden.

Das Beobachtungsergebnis scheint wohl der Arbeitshypothese von Döpel zu widersprechen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß das Endresultat durch Sekundärvorgänge kompliziert wurde. Die Anregung des Wasserstoffmoleküls durch das angeregte Argonion, wie folgt:



stößt jedoch aus Energiegründen auf Schwierigkeiten. Es sind noch besondere Untersuchungen zur Klärung dieser Frage nötig; leider mußte diese Arbeit infolge begrenzter Zeit abgeschlossen werden.

Schlußbemerkung. Das von Döpel als Arbeitshypothese gedachte anschauliche Stoßmodell, das sich bei zahlreichen korpuskularen Stoßprozessen gut bewährt hatte, würde die experimentellen Beobachtungen im untersuchten Bereich bei Stoß von Wasserstoffteilchen auf Wasserstoff, Quecksilber und Argon klären, wenn die Anregung vorwiegend durch Atomstöße bedingt wäre. Die Wirkung der Molekülstöße an der Anregung ist sehr wahrscheinlich, jedoch bis jetzt noch nicht geklärt. Jedenfalls ist zu vermuten, daß der Anteil der Wasserstoffmoleküle bei den Stoßprozessen das Endresultat in der Richtung ändern würde, daß eine allgemeine Verminderung der Ausbeute erfolgen müßte. Auch beim Stoß von Wasserstoffteilchen auf Helium, wo vor allem die geladenen Teilchen anregen, würde das Beobachtungsmaterial nicht im Widerspruch mit der Döpelschen Arbeitshypothese stehen. Beim Stoß von Argonteilchen auf

Wasserstoff und Quecksilber scheint das Beobachtungsmaterial der Arbeitshypothese von Döpel zu widersprechen. Jedoch ist es nicht ausgeschlossen, daß in diesem Falle Sekundärvorgänge die Unvereinbarkeit bewirken.

Eine strengere Kritik der Döpelschen Arbeitshypothese kann jedoch erst auf Grund eines mit homogenisierten Korpuskularstrahl erhaltenen Beobachtungsmaterials durchgeführt werden.

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Den Institutsdirektoren Herrn Prof. Dr. Heisenberg und Herrn Prof. Dr. Hoffmann danke ich herzlich für die Bereitstellung der Hilfsmittel des Instituts und das Interesse an meinen Untersuchungen.

Herrn Prof. Dr. Hanle danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die wertvollen Diskussionen im Verlauf derselben.

Ich fühle mich auch verpflichtet, dem „Zarząd Funduszu Kultury Narodowej“ für die Gewährung eines Stipendiums, das mir die Durchführung der Untersuchungen ermöglichte, bestens zu danken.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

[Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung m. b. H.
(Osram-Konzern).]

Die Breite der Spektrallinien in der Quecksilberhochdruckentladung.

Von **R. Rompe** und **P. Schulz** in Berlin.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 2. Januar 1938.)

Die Breiten einer Reihe von Linien des Quecksilbers werden in der Quecksilberhöchstdrucklampe systematisch durchgemessen und auf die Breiten der Terme zurückgeführt. Der 2^1P_1 -Term zeichnet sich durch eine große symmetrische Breite aus, die gedeutet wird als „Eigendruckverbreiterung“ infolge von Resonanzwechselwirkung und Stößen zweiter Art. Die Breiten der $1S_0$ -Zustände sind vernachlässigbar klein. Der 3^1D_2 - und 3^3D_2 -Term werden durch Elektronenstöße symmetrisch verbreitert. Die unsymmetrische Verbreiterung der Linien des Triplettsystems beruht wahrscheinlich auf „statischen“ Einflüssen im Sinne der Theorien von Margenau¹⁾ und Kuhn.

Die Verbreiterung von Spektrallinien der Metaldämpfe durch den eigenen Dampfdruck hat sich im allgemeinen als sehr groß erwiesen, viel größer als durch fremde Gase, wie etwa durch Edelgase, Stickstoff oder Wasserstoff²⁾. Man spricht deshalb von „Eigendruckverbreiterung“ als einer charakteristischen Art der Verbreiterung. Ob allerdings bei allen Linien eine für die Verbreiterung durch den eigenen Dampf typische Erscheinung vorliegt, ist sehr fraglich. So kann das starke Anwachsen der Breite der hohen Serienlinien des Natriums bei Erhöhung des Dampfdruckes, wie sie Füchtbauer und Schulz (l. c.) fanden, wahrscheinlich nach der Theorie von Reinsberg³⁾, die die Fremddruckverbreiterung der hohen Serienlinien behandelt, erklärt werden. Die viel stärkere Wirkung des Natriums als beispielsweise die der Edelgase wird eine Folge seiner sehr viel größeren Dielektrizitätskonstanten, die wesentlich in die Theorie eingeht, sein. Zur Prüfung fehlen allerdings die genauen Werte für die Dielektrizitätskonstante des Natriums.

¹⁾ Vgl. H. Margenau u. W. Watson, *Rev. of Modern Phys.* **8**, 22, 1936.
— ²⁾ W. Orthmann u. P. Pringsheim, *ZS. f. Phys.* **46**, 160, 1928; R. Minowski, ebenda **36**, 839, 1926; F. Waibel, ebenda **53**, 459, 1929; Chr. Füchtbauer u. P. Schulz, ebenda **97**, 699, 1935; Qualitative Beobachtungen finden sich in der Literatur über Metall-Edelgasentladungen, vgl. z. B. H. Krefft, ebenda **77**, 752, 1932; R. Rompe, ebenda **74**, 175, 1932. — ³⁾ C. Reinsberg, ebenda **105**, 460, 1937.

Die Untersuchungen der Linienflügel bei der Quecksilberresonanzlinie 2537 \AA ¹⁾, wie sie besonders von Kuhn ausgeführt wurden, gab eine Intensitätsverteilung, die im wesentlichen durch die Londonschen Polarisationskräfte²⁾ erklärt werden kann. Auch hier liegt also eine Ursache der Verbreiterung vor, die in gleicher Weise bei der Fremdgasverbreiterung besteht.

Es soll im folgenden die Frage geklärt werden, welche Vorgänge zur Verbreiterung durch den eigenen Dampfdruck beitragen. Die bisherigen Untersuchungen verwenden Absorptionslinien. Sie sind deshalb in der Auswahl der Linien beschränkt, insbesondere beim Quecksilber aus praktischen Gründen auf die Resonanzlinie 2537 \AA . Wir verwenden deshalb Emissionslinien und haben dadurch die Möglichkeit, eine Reihe von Linien systematisch durchzumessen.

Versuchsanordnung. Als Lichtquelle diente eine Quarz-Quecksilberhochdrucklampe der für die Erzeugung hoher Leuchtdichten entwickelten Form³⁾. Die Betriebsdaten der Lampe sind: Betriebsspannung: 220 Volt Gleichstrom, Brenns spannung: 80 Volt, Betriebsstrom: 6 Amp., Bogenlänge: etwa 4,5 mm, Bogenbreite: 1,5 mm. Die Lampe wurde auf dem Spalt eines 1,75 m-Konkavgitters abgebildet. Die Aufnahmen wurden in 2. Ordnung gemacht; die Dispersion betrug $3,67 \text{ \AA/mm}$. Die infrarote Linie 10140 wurde in 1. Ordnung aufgenommen. Als Aufnahmeplatten dienten für die beiden gelben Quecksilberlinien Ilford Soft Gradation Panchromatic Plates, für die infrarote Linie Agfa 1050, für die übrigen Agfa-Special. Im ultravioletten Gebiet wurden gelegentlich photomechanische Platten verwendet.

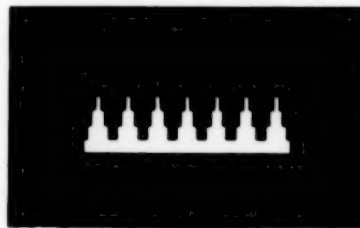


Fig. 1. Raster.

Zur Festlegung der Schwärzungskurve diente ein Raster⁴⁾ (Fig. 1) mit vier Intensitätsstufen. Der Raster war aus steifem schwarzen Papier ausgeschnitten und auf eine Quarzplatte aufgeklebt. Die Durchlässigkeiten betrugen 100, 76,5, 55,3 und 30%. Die Durchlässigkeiten wurden mit einer Photozelle nachgeprüft. Der Raster wurde in die zweite Brenmlinie des Konkavgitters aufgestellt (Fig. 2). Auf die richtige Ausleuchtung des

¹⁾ H. Kuhn u. K. Freudenberg, ZS. f. Phys. **76**, 38, 1932; P. de Groot, P. Zeman, Verhandelingen **312**, 1935; H. Kuhn, Phil. Mag. **18**, 987, 1934; Proc. Roy. Soc. London (A) **158**, 230, 1937. — ²⁾ F. London, ZS. f. Phys. **63**, 245, 1930; ZS. f. phys. Chem. (B) **11**, 222, 1930; H. Kuhn u. F. London, Phil. Mag. **18**, 983, 1934. — ³⁾ R. Rompe u. W. Thouret, ZS. f. techn. Phys. **17**, 377, 1936. — ⁴⁾ R. Frerichs, Ann. d. Phys. **81**, 807, 1926.

Gitters wurde sehr sorgfältig geachtet. Das Spektrum erscheint dann unterteilt in vier Intensitätsstufen entsprechend den Durchlässigkeiten des Rasters. Fig. 3 zeigt die Aufnahme einer Linie.

Die Schwärzungen der ausgemessenen Linien wurden so eingerichtet, daß das Maximum eben noch im geraden Teil der Schwärzungskurve lag.

Die Aufnahmen wurden mit einem Kipp-schen Registrierphotometer ausgewertet und die Schwärzungen in bekannter Weise auf Intensitäten umgerechnet.

Ergebnisse. Es wurden die Linien untersucht, die den 2^1P_1 - bzw. einen der 2^3P_i -Terme als den unteren Zustand haben. Von dem 1^1P_1 -Term aus wurden gemessen die Linien $2^1P_1 - n^1S_0$; $2^1P_1 - n^1D_2$, sowie die Interkombinationen $2^1P_1 - 3^3D_2$. Alle diese Linien sind nur wenig unsymmetrisch, und zwar nach Rot verbreitert. Die Linienform dieser Kombinationen wird sehr gut durch eine Dispersionsverteilung wiedergegeben, d. h. eine Intensitätsverteilung der Form

$$I(\nu) = \frac{C}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/2)^2},$$

wobei γ die Halbwertsbreite der Linien ist. Fig. 4 zeigt die Linie 10140 \AA ($2^1S_0 - 2^1P_1$) als Beispiel. Die eingezeichneten Punkte geben die Werte an, die für eine Dispersions-

verteilung mit $\gamma = 32 \text{ cm}^{-1}$ berechnet wurden. $\gamma = 32$ ist die Halbwertsbreite, wie sie dem gemessenen Wert auf der violetten Seite entspricht.

Man sieht, daß eine Dispersionsverteilung ziemlich exakt vorliegt. Auf der roten Seite ist der Abfall etwas flacher.

In Tabelle 1 haben wir die Halbwertsbreiten eingetragen, und zwar in \AA

und cm^{-1} . In der letzten Zeile ist außerdem noch die Halbwertsbreite gegeben, wie sie der der violetten Seite entspricht. Die Linien 5791 und

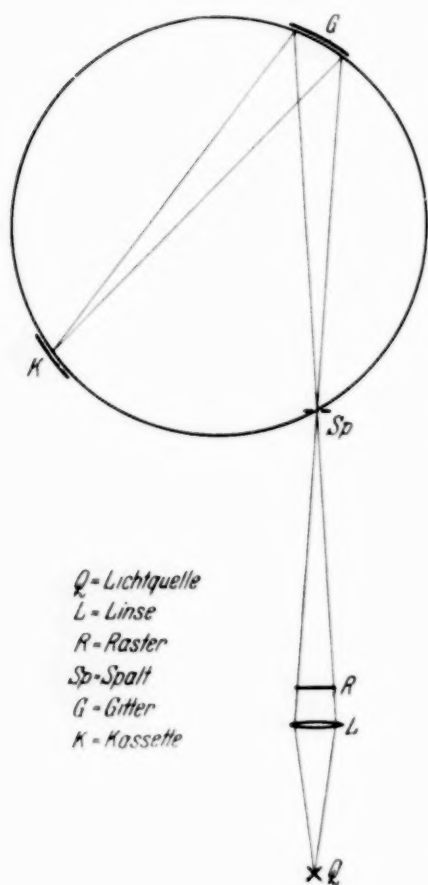


Fig. 2.



Fig. 3. Aufnahme der Linie 5461 \AA .

5770 Å sind so stark verbreitert, daß sie nicht vollkommen getrennt werden können. Beide Linien zeigen bei gleicher Maximalintensität dieselbe Intensitätsverteilung. Die violette Seite der Linie 5770 Å und die rote der Linie 5791 Å wurden durch die Überlappung nicht betroffen und können ausgemessen werden. Auf der violetten Seite liegt wieder Dispersionsverteilung vor. Die rote Seite fällt genau wie bei der Linie 10140 Å etwas flacher ab.

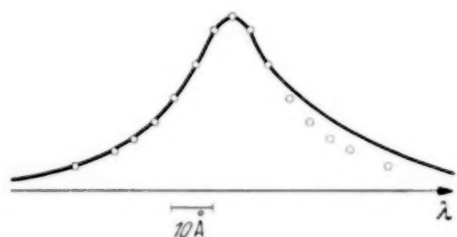


Fig. 4. Form der Linie 10140 Å.

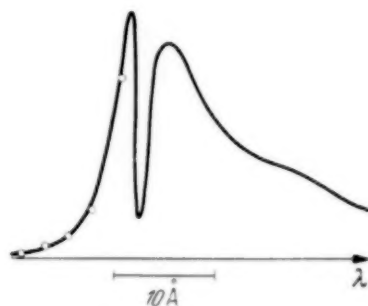


Fig. 5. Form der Linie 2967 Å.

Eine andere Linienform besitzen die mit einem der 2^3P_i -Zustände kombinierenden. Die Linien $2^3P_i - 2^3S_1$ bzw. $2^3P_i - 3^3D_i$ sind alle stark selbstumgekehrt, so daß es nicht möglich ist, für sie Halbwertsbreiten anzugeben. Die Kombinationen 2^3P_2 bzw. 2^3P_1 mit 3^3D_i sind durch Nachbarlinien gestört, so daß sich zur Ausmessung nur die Linien $2^3P_i - 2^3S_1$ (5461, 4358, 4047 Å) und $2^3P_0 - 3^3D_1$ (2967) eignen. Diese Linien zeigen alle dieselbe Form: starke Rotunsymmetrie und einen steilen Abfall nach dem Violetten. In einem Abstand von der Linienmitte, wo die Selbstumkehr nicht mehr stört, ist die Intensitätsverteilung auf der

violetten Seite darstellbar durch $I(r) = \frac{C}{(r_0 - r)^2}$, das ist eine Dispersionsform für $r_0 - r \gg \gamma/2$. Fig. 5 gibt als Beispiel die Linie 2967. Die Punkte zeigen die berechneten Werte für $I(r) = \frac{C}{(r_0 - r)^2}$.

Der Abfall auf der roten Seite ist flacher als der für van der Waals-Kräfte anzunehmende: $I(r) = \frac{C}{(r - r_0)^{3/2}}$ ¹⁾. Außerdem ist auf der roten Seite noch die Andeutung einer Struktur vorhanden, und zwar wird bei allen Linien dieses Typs eine solche Struktur beobachtet. Um diese deutlicher zu zeigen, bringen wir in Fig. 6 eine Registrierkurve der Linie 5461 Å.

¹⁾ H. Kuhn, l. c.

Tabelle 1.

Linie		$\Delta\lambda$ in Å	$\Delta\nu$ in cm^{-1}	$\Delta\nu_p$ in cm^{-1}
10 140	$2^1P_1 - 2^1S_0$	37,7	36,7	32
4 916	$2^1P_1 - 3^1S_0$	8,2	33,9	$\sim 33,9$
4 108	$2^1P_1 - 4^1S_0$	verschwindet im Kontinuum		
5 791	$2^1P_1 - 3^1D_2$	21	63	54,2
5 770	$2^1P_1 - 3^3D_2$			
4 338	$2^1P_1 - 4^1D_2$	verschwindet im Kontinuum		

Bei den Kombinationen mit den höheren Termen ist infolge der rasch abnehmenden f -Werte die Selbstumkehr verschwunden. Es konnten die Linien 3342 Å ($2^3P_2 - 3^3S$); 2925 Å ($2^3P_2 - 4^3S$) ausgemessen werden. Die Linie 2893 Å ($2^3P_2 - 3^3S$) zeigt noch eine leichte Andeutung von

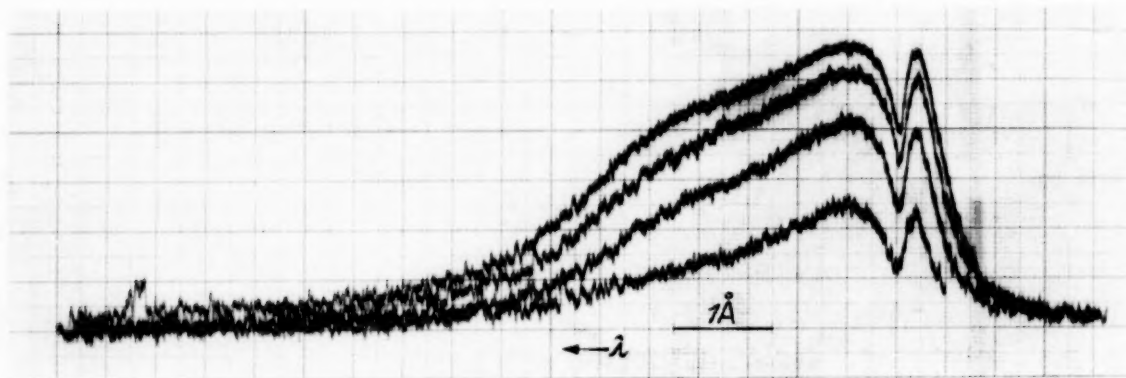


Fig. 6. Registrierkurve der Linie 5461 Å.

Selbstumkehr, ist sonst aber der Linie 3342 Å sehr ähnlich. Die violette Seite dieser Linien hat Dispersionsverteilung. Ihre Halbbreite ist verhältnismäßig klein, verglichen mit denen der 2^1P_1 -Kombinationen. Die

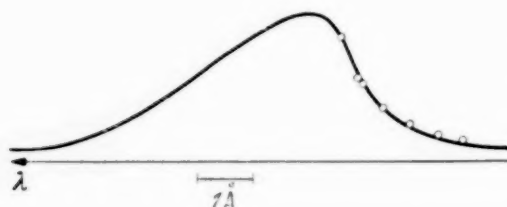


Fig. 7. Form der Linie 3342 Å.

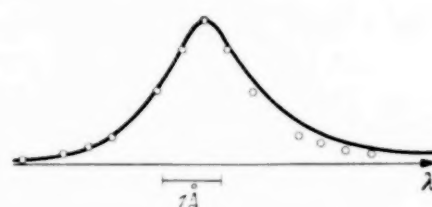


Fig. 8. Form der Linie 2925 Å.

rote Seite scheint eine Überlagerung der symmetrischen Dispersionsverteilung und einer langsam mit der Frequenz abfallenden Intensität zu sein. Die Form der Linie 3342 Å zeigt Fig. 7. Die Punkte auf der violetten Seite sind wieder die berechneten Werte der Dispersionsverteilung. Dieselbe

Tabelle 2.

Linie		$\Delta\lambda$ in Å	$\Delta\nu$ in cm^{-1}	$\Delta\nu_p$ in cm^{-1}
5461	$2^3P_2-2^3S_1$	}	starke Selbstumkehr, starke Rotun- symmetrie, Andeutung einer Struktur auf der roten Seite	
4358	$2^3P_1-2^3S_1$			
4047	$2^3P_0-2^3S_1$			
2967	$2^3P_0-2^3D_1$			
3341	$2^3P_2-3^3S_1$			
2925	$2^3P_2-4^3S_1$	3,38	30,2	18
2759	$2^3P_2-5^3S_1$	1,9	22,2	19,2
4358	$2^3P_1-3^3S_1$	verschwindet		
2576	$2^3P_1-4^3S_1$	Selbstumkehr bemerkbar, starke Rot- unsymmetrie		
2753	$2^3P_0-3^3S_1$	verschwindet		

Form zeigt die Linie 2893 Å. Die Linie 2925 Å zeigt eine annähernd symmetrische Form (Fig. 8). Die Gesamtbreite ist gering und entspricht ungefähr der der violetten Seite der anderen Linien. Tabelle 2 enthält die Daten der gemessenen Linien.

Auffallend ist noch die Tatsache, daß Linien von höheren Termen als der Hauptquantenzahl 4 von uns nicht erhalten werden konnten, während sie in der Quecksilber-Spektrallampe¹⁾ der bekannten Art mit erheblichen Intensitäten auftreten.

Bei der Deutung der Linienbreite von Emissionslinien ist eine eingehende Diskussion der Besonderheiten der Lichtquelle unerläßlich. Die von uns verwendete Lichtquelle ist in Fig. 9 dargestellt. Der Bogen wurde so auf den Spalt abgebildet, daß die gemessenen Werte stets einen Mittelwert über die Achse des Bogens darstellen. Die Homogenität der Bedingungen im Entladungskanal ist bis auf je etwa 0,1 mm der unmittelbaren Nachbarschaft der Elektroden in ausreichendem Maße gewährleistet. — Die uns hier interessierenden Parameter der Entladung sind: die Dichte und die Temperatur im Entladungskanal.

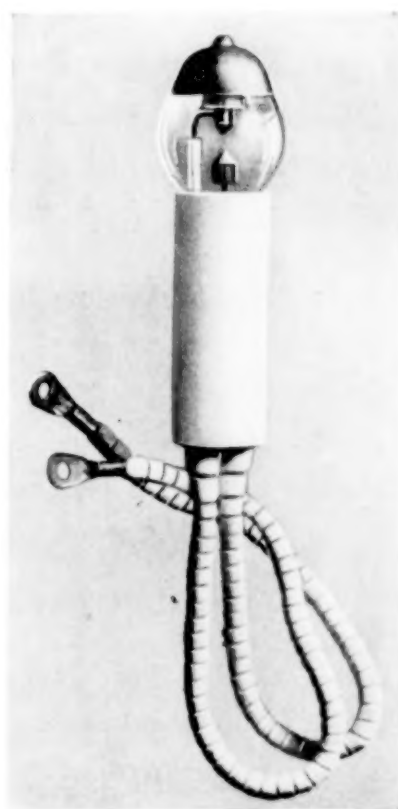


Fig. 9.
Quecksilberhochdrucklampe.

¹⁾ H. Alterthum u. M. Reger, Das Licht 3, 68, 1933.

Die mittlere Dichte wurde aus dem Volumen des Quarzkolbens und der eingewogenen, im Betrieb vollständig verdampften Menge Quecksilber berechnet. Es ergab sich: $1,51 \cdot 10^{20}$ Atome/cm³.

Zur Ermittlung der Temperatur in der Achse der Entladung bedienen wir uns einer von Elenbaas¹⁾ für zylindrische Quecksilberröhren aufgestellten Beziehung:

$$T_{\max} = 6025 \cdot \left(\frac{L}{8,75 + 5,7 m} \right)^{0,1} \quad (1)$$

L = Leistung in Watt/cm, m = mg Hg pro cm Rohrlänge, restlos verdampft. Es ergibt sich für unsere Lichtquelle eine Temperatur von 5850° abs. Die Elenbaassche Formel gilt nur angenähert für unsere Lichtquelle. Aus Gründen, die an dieser Stelle nicht besprochen werden sollen, glauben wir, daß der Elenbaassche Wert eine untere Grenze für die Achsentemperatur unserer Lampe darstellt und die tatsächliche Temperatur innerhalb eines Bereiches von 10% höher liegen kann. Wir verwenden im folgenden als mittleren Wert 6000°. Die Konstruktion der Lichtquelle bedingt eine intensive Konvektion parallel zu dem ruhenden Kern der Entladung. Der Temperaturgradient zwischen dem ruhenden Kern und der aufsteigenden Gasströmung dürfte groß sein, so daß die Emission der Linien — zum mindesten im Sichtbaren — vornehmlich vom Kern der Entladung ausgeht. — Unter Berücksichtigung der höheren Temperatur in der Achse der Entladung erhalten wir dort eine Dichte, die im Verhältnis $\frac{1}{6}$ kleiner ist, als die mittlere Dichte, d. h. $2,57 \cdot 10^{19}$ cm⁻³.

Die Möglichkeit der Veränderung der Linienform durch Reabsorption besteht prinzipiell bei jeder Hochdruckentladung. Bekanntlich ist hierbei die Linienform gegeben durch:

$$I_r = I_0 \left(1 - e^{-\frac{4 \pi n z}{\lambda} \cdot l} \right), \quad (2)$$

wobei $n z$ den Absorptionskoeffizienten, l die Schichtlänge, λ die Wellenlänge, I_0 die Intensität der Frequenz ν in unendlich dünner Schicht bedeuten. Ist die Breite durch Strahlungsdämpfung oder Stoßdämpfung verursacht, so gilt:

$$n z = \frac{e^2}{4 \pi r_0 m} \cdot \Re \cdot \frac{\gamma/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (3)$$

mit

$$\Re = N_i f_{ik} \left(1 - \frac{g_i}{g_k} \frac{N_k}{N_i} \right). \quad (4)$$

¹⁾ W. Elenbaas, Physica **1**, 211, 673, 1934; **2**, 169, 1935.

Dabei bedeuten: N_i , N_k die Anzahl der Atome in den Zuständen, i bzw. k , f_{ik} die Oszillatorenstärke des Überganges $i \rightarrow k$, g_i , g_k die statistischen Gewichte der Zustände.

Der Absorptionskoeffizient in der Linienmitte ist

$$(n\kappa)_{\max} = \frac{e^2}{4\pi r_0 m} \cdot \Re \cdot \frac{1}{\gamma/2}. \quad (5)$$

Er ist um so kleiner, je größer die Halbwertsbreite (γ) ist. Für das Verhältnis des maximalen Absorptionskoeffizienten der natürlichen Linie zur verbreiterten ergibt sich das Verhältnis ihrer Halbwertsbreiten. Die Reabsorption tritt um so weniger in Erscheinung, je größer die zusätzliche Verbreiterung ist. Aus den Gleichungen (2) und (3) sieht man ferner, daß der Einfluß der Verfälschung durch Reabsorption um so geringer wird, je weiter man sich von der Linienmitte entfernt. Dies ist wichtig für die Linien, bei welchen die Linienform durch Überlagerung mehrerer Faktoren entsteht, z. B. der ${}^3S_1 - {}^3P_{210}$ -Kombinationen.

Die Überlegungen gelten qualitativ auch für andere Linienformen. Die Gesamtaborption einer Linie ist unabhängig von der Breite¹⁾. Folglich muß die Absorption in einem bestimmten Frequenzintervall abnehmen, je breiter die Linie wird, und dementsprechend die Verfälschung durch Reabsorption.

Bei der Anwendung auf unsere Entladung können wir von vornherein den Einfluß der Klammer in Gleichung (4) vernachlässigen, da bei der Temperatur von 6000° die Besetzungszahlen der Terme mit wachsender Energie äußerst rasch abnehmen.

Bei allen auf dem Term 2^1P_1 endenden Linien ist die Dispersionsbreite außerordentlich groß, gut 1000mal größer als die natürliche. Außerdem ist die Anzahl der Atome N_i im Zustand 2^1P_1 relativ gering ($3,3 \cdot 10^{15}$). Es ist deshalb nicht zu erwarten, daß diese Linien selbst in der Umgebung der Linienmitte einen Einfluß der Reabsorption aufweisen. Bei den auf den 2^3P_1 endenden Linien ist die Breite nicht in demselben Maße groß; auch ist die Anzahl der Atome in diesen Zuständen ($2,1 \cdot 10^{16}$; $6,1 \cdot 10^{16}$; $8,5 \cdot 10^{16}$) größer. Für die Übergänge mit größeren f -Werten wird daher die Reabsorption, wenigstens in der Linienmitte, bemerkbar. Es ist jedoch gerade bei diesen Linien die Umgebung der Linienmitte stark selbstungekehrt, so daß eine Ausmessung der Linienform nicht möglich ist.

¹⁾ Chr. Füchtbauer, G. Joos u. O. Dinkelacker, Ann. d. Phys. **71**, 204, 1923.

Für das Auftreten einer Selbstumkehr ist die Absorption in einer kälteren Schicht verantwortlich. Das Fehlen der Selbstumkehr bei allen Linien von 2^1P_1 aus und ihr Auftreten bei den stärkeren Linien von 3^1P_1 aus dürfte zwei Ursachen haben:

1. ist das $n\lambda$ für die Singulettlinien wegen ihrer größeren Breite stärker herabgesetzt als für die Triplettlinien;

2. nimmt in einem bestimmten Temperaturgefälle die Konzentration der 2^1P_1 -Atome mit 6,7 Volt Anregungsspannung schneller ab als die der 2^3P_{210} -Atome mit 4,9 bis 4,2 Volt Energie.

Diese beiden Ursachen erklären auch die an der Lichtquelle beobachteten Erscheinungen, so daß in der heftigen, den Entladungskern umgebenden Konvektionsströmung (Fackel) die grüne Triplettlinie sehr stark, offensichtlich durch Fluoreszenz angeregt, erscheint, während die gelben Linien fast vollständig fehlen.

Die starke Selbstumkehr der auf 2^3P_{210} endenden Linien mit großen f -Werten bewirkt andererseits, daß die Emission hauptsächlich durch die weit von der Liniemitte entfernten Teile der Linie erfolgt, so daß diese stärker als bei den nicht selbstumgekehrten Linien in Erscheinung treten können.

Wir wollen zunächst die Linien mit symmetrischen Verbreiterungen der Linienform ins Auge fassen bzw. den symmetrischen Anteil der unsymmetrisch verbreiterten Linien. Diese Linien haben Dispersionsverteilung. Eine solche Verteilung wird geliefert durch die Stoßdämpfungstheorie. Sie setzt voraus, daß die Zeit zwischen zwei Einwirkungen groß ist gegenüber der Zeit der merklichen Beeinflussung selbst. Die Störung ist dann darstellbar als ein Phasensprung im Schwingungsverlauf oder als ein plötzliches Abreißen der Schwingung des Ersatzoszillators. Die Fourier-Zerlegung führt zu einer Intensitätsverteilung

$$I(\nu) = C \frac{\gamma/2}{4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (6)$$

wo $\gamma/2$ die Anzahl der Störungen pro Sekunde (Stoßzahl) ist. $\gamma = 2\pi A$ ist bekanntlich gleich der Halbwertsbreite im Kreisfrequenzmaß.

Je nach dem Kraftgesetz der Wechselwirkung ist die Stoßzahl eine andere. Als erstes betrachten wir die Wechselwirkung zwischen dem Dipol, welchen das angeregte Atom bildet, und dem Coulombschen Feld eines geladenen Teilchens, in der Entladung also eines Elektrons oder Ions.

Unsöld¹⁾ hat sie bereits zur Erklärung des Verhaltens von Mg-I-Linien in der Sonnenkorona herangezogen. Die hierdurch erzeugte Breite beträgt:

$$\gamma = \frac{2^{3/2} \cdot \pi^{13/6}}{2 \cdot \pi \cdot c} \cdot C^{2/3} \cdot (R \cdot T)^{1/6} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right)^{1/6} \cdot N. \quad (7)$$

N ist die Anzahl der Ionen bzw. Elektronen, μ_1 das Atomgewicht des strahlenden Atoms, μ_2 das des Ions oder Elektrons, $R = 8,315 \cdot 10^7$ erg/grad die Gaskonstante, C ist die Konstante für die Verschiebung durch den quadratischen Stark-Effekt.

Nach Messungen von Wendt und Wetzel²⁾ beträgt diese für den 4^1D_2 - bzw. 4^3D_{321} -Term des Quecksilbers $C = 12 \cdot 10^{-14}$, während sie für die niederen Terme bzw. den $4s$ -Term noch unmeßbar klein ist. Bei einer Elektronendichte von $3,9 \cdot 10^{17}$, berechnet aus der Saha-Formel für die auf S. 660 angegebenen Daten von Dichte und Temperatur, wie sie in unserer Entladung vorliegt, ergibt sich hiermit eine Breite von etwa 55 cm^{-1} . Die Breite durch Ionenstöße ist nach (6) 7,5mal kleiner. Da die Verschiebung durch den Stark-Effekt rasch mit der Hauptquantenzahl abnimmt und für die S -Terme noch bedeutend kleiner ist, kann angenommen werden, daß dieser Effekt keinen Einfluß auf die Linien $2^1P_1 - 2^1S_0$; $2^1P_1 - 3^1S$ hat. Wohl aber kann die größere Breite der Linien $2^1P_1 - 3^1D_2$ oder $2^1P_1 - 3^3D_2$ auf der Wirkung der Elektronenstöße beruhen.

Die Stark-Effekt-Konstante C geht angenähert mit der siebenten Potenz der wahren Quantenzahlen³⁾. Der $3D$ -Term hat die wahre Quantenzahl 6, der $4D$ -Term 7. Durch Multiplikation mit $(\frac{6}{7})^7$ erhält man also den ungefähren Wert für den $3D$ -Term. Unter Berücksichtigung dieses Faktors ergibt sich für die Breite des $3D$ -Terms in unserer Entladung der Wert 28 cm^{-1} .

Als zweites sind die Stöße des angeregten Atoms mit unangeregten Atomen der gleichen Art zu nennen. Man muß hierbei zwei verschiedene Möglichkeiten der Beeinflussung der Linienbreite unterscheiden. Betrachtet man einen klassischen Oszillator, so wird beim Vorbeifliegen eines Atoms im allgemeinen eine Verstimmung desselben eintreten. Die Größe dieser Verstimmung ist abhängig von den speziellen Wechselwirkungskräften. Wenn die Zeit, während welcher diese Verstimmung eintritt, klein ist gegen die Stoßzeit, läßt diese sich in bekannter Weise durch einen äquivalenten

¹⁾ A. Unsöld, ZS. f. Astrophys. **12**, 56, 1936. — ²⁾ G. Wendt u. R. A. Wetzel, Ann. d. Phys. **50**, 429, 1916. — ³⁾ R. Becker, ZS. f. Phys. **9**, 332, 1922; A. Unsöld, Ann. d. Phys. **82**, 355, 1927.

Phasensprung ersetzen; die Häufigkeit derartiger Phasensprünge liefert die durch diesen Vorgang bedingte Verbreiterung der Linie.

Für den Fall der Wechselwirkung durch van der Waalssche Kräfte hat Weisskopf¹⁾ unter Berücksichtigung der quantentheoretischen Besonderheiten die Verbreiterung berechnet. Er erhält für die Halbwertsbreite δ_1 :

$$\delta_1 = \pi \cdot \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot f \cdot N. \quad (8)$$

Hierin bedeutet N die Zahl der (artgleichen) Atome pro cm^3 , f die Zahl der Ersatzoszillatoren, ω_0 die Frequenz der Liniemitte. Als zweites ist zu berücksichtigen, daß zwischen einem angeregten und einem unangeregten Atom eine Energieübertragung durch Stoß 2. Art²⁾ häufig vorkommt. Derartige Stöße verkürzen die Lebensdauer des angeregten Terms; im Modell des klassischen Oszillators bedeuten sie einen zusätzlichen Energieentzug, d. h. eine Vergrößerung der Dämpfung. Eine Berechnung des Einflusses der Stöße 2. Art ist von Furssow und Wlassow³⁾ gegeben worden. Sie erhalten für die Halbwertsbreite unter Annahme der Resonanzwechselwirkung zweier gleichartiger Dipole:

$$\delta_2 = \frac{8}{3} \pi \cdot \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot N \cdot f. \quad (9)$$

δ_2 setzt sich hierbei zusammen aus der Wirkung von Passagen außerhalb eines Radius:

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{e^2}{m \omega_0 \cdot v}} \quad (10)$$

(v = die Relativgeschwindigkeit), bei welchen, im klassischen Modell, die Energie des schwingenden Oszillators gerade vollständig vom vorbeifliegenden Atom aufgenommen wird, und die einen Beitrag zur Breite liefern:

$$\delta'_2 = \frac{2}{3} \pi \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot N \cdot f, \quad (11)$$

und den Passagen mit $\varrho < \varrho_0$, für die die genannten Autoren den Wert

$$\delta''_2 = 2 \pi \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot N \cdot f \quad (12)$$

angeben.

¹⁾ V. Weisskopf, ZS. f. Phys. **75**, 287, 1932. — ²⁾ Unter Stoß 2. Art ist sinngemäß „sensibilisierte Fluoreszenz“ verstanden, d. h. nicht „Umsetzung in kinetische Energie“. — ³⁾ W. Furssow u. A. Wlassow, Phys. ZS. d. Sowjetunion **10**, 378, 1936.

Wie man zeigen kann, ist die Gleichung (12) um einen Faktor 2 zu groß¹⁾, so daß wir für die gesamte, von den Stößen 2. Art herrührende Breite den Wert annehmen:

$$\delta_3 = \frac{5}{3} \pi \cdot \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot N \cdot f. \quad (13)$$

Hierzu muß man, um die gesamte, durch artgleiche Atome hervorgerufene Verbreiterung zu erhalten, den Weisskopfschen Wert [Gleichung (8)] addieren, und erhält so:

$$\delta = \frac{8}{3} \pi \cdot \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot N \cdot f. \quad (14)$$

Auf Grund der Gleichung (14) erhalten wir für die Breite des Terms 2^1P_1 in unserer Entladung bei $N = 2,57 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (siehe S. 660) und $f = 1,3^2)$:

$$\delta = 37 \text{ cm}^{-1}.$$

Dieser Wert stimmt innerhalb unserer Meßgenauigkeit mit der Breite der Linien $2^1P_1 - 2^1S_0$ und $2^1P_1 - 3^1S_0$ (32 bzw. 33,9 cm^{-1}) überein. Da, wie oben (siehe S. 663) gesagt, eine Verbreiterung durch Elektronenstöße für die Terme 2^1S_0 und 3^1S_0 kaum anzunehmen ist und eine Verbreiterung nach Gleichung (14) wegen der bei 60000⁰ relativ geringen Besetzungszahl des 2^1S_1 -Terms um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die des 2^1P_1 -Terms, muß man, im Einklang mit der Weisskopf-Wignerschen Theorie³⁾, die Breite der beiden genannten Linien als durch den 2^1P_1 -Term verursacht annehmen. Da unsere Meßgenauigkeit etwa 20% beträgt, können wir feststellen, daß sowohl der Betrag infolge der Stöße 2. Art (13) oder der van der Waalsschen Wechselwirkung (8), jeder für sich allein genommen, einen zu kleinen Wert der Verbreiterung ergibt, nämlich: 23 bzw. 11 cm^{-1} .

In entsprechender Weise geht die Breite des 2^1P_1 -Terms naturgemäß auch in diejenige der Linien $2^1P_1 - 3^1D_2$, $2^1P_1 - 3^3D_2$ ein. Zieht man 32 cm^{-1} von der gemessenen Breite von 54,2 cm^{-1} ab, so bleiben 22,8 cm^{-1} für eine gegebenenfalls auf die Wirkung von Elektronenstößen zurückgehende Verbreiterung. Nach Formel (7) hatten wir eine Breite von 28 cm^{-1} berechnet. Die Übereinstimmung ist also auch innerhalb der Fehlergrenzen. Diese Deutung läßt sich prüfen, wenn der Gang der Verbreiterung dieser

¹⁾ Dieser Punkt wird in einem zusammenfassenden Bericht über Linienbreiten des einen von uns demnächst näher begründet. — ²⁾ M. Knoll, F. Ollendorf, R. Rompe, Gasentladungstabellen. Berlin 1935. — ³⁾ V. Weisskopf u. E. Wigner, ZS. f. Phys. 65, 18, 1930.

Linien mit der Stromdichte untersucht wird. Da die Temperatur des Entladungskanals nach Gleichung (1) nur sehr langsam mit der Leistung, d. h. der Stromstärke variiert, ändert sich auch die in Gleichung (14) eingehende Dichte der Atome pro cm^3 nur wenig, so daß bei konstanter mittlerer Dichte die spezifische Eigendruckverbreiterung der 1P_1 -Term praktisch konstant ist. Der von den Elektronen-tößen herrührende Anteil der Breite hingegen variiert mit der Elektronenkonzentration, die in dem vorliegenden Druck- und Stromstärkebereich etwas schwächer als proportional der Stromstärke anwächst. Untersuchungen sind im Gange, welche das Verhalten der Terme 3^1D und 3^3D bei Variation der Stromstärke klären werden.

Für den symmetrischen Teil der Verbreiterung der auf $^3P_{210}$ endenden Linien kommt der Einfluß der Stöße 2. Art und der Verstimmung durch artgleiche Atome viel weniger in Frage als für den 1P_1 -Term. Dies liegt darin begründet, daß der f -Wert der Linie 2537 \AA nur 0,025 beträgt, so daß der sich aus der Gleichung (14) ergebende Wert um den Faktor $2,5 \cdot 10^{-2}$ kleiner ist als für die Linie $1^1S_0 - 2^1P_1$. Die langwellige, stark unsymmetrische Verbreiterung dürfte auf „statische“ Einflüsse, wie sie z. B. Kuhn (l. c.) für die langwellige Verbreiterung der Linie 2537 nachgewiesen hat, für die Abstände, in welchen im wesentlichen nur die van der Waalsschen Kräfte wirksam sind, zurückgehen. Die Theorie verlangt für diese Wechselwirkung eine Abhängigkeit der Intensität mit

$$I(r) = C \frac{1}{(r - r_0)^{3/2}} \quad (15)$$

in den äußeren Teilen der roten Seite der Linien.

Diese Abhängigkeit ist bei der Linie 3312 im roten Flügel angenähert vorhanden. Bei anderen unsymmetrischen Linien ist der Intensitätsabfall nach dem Roten sehr viel langsamer, besonders bei großen Abständen von der Linienmitte. Wie man leicht ersehen kann, bedeutet ein solcher ein stärkeres Abnehmen der Wechselwirkungskraft mit dem Abstand als bei van der Waalsschen Kräften mit: $V = \frac{C}{r^6}$.

Es liegt hierbei nahe, an ein Kraftgesetz nach der Beziehung

$$V = e^{-ar},$$

d. h. an Austauschkräfte zu denken. Eine Stütze könnte diese Annahme finden in den von Mrzowski¹⁾ für Hg_2 angegebenen Potentialkurven,

¹⁾ S. Mrzowski, ZS. f. Phys. **104**, 228, 1932.

in welchen man in der Potentialkurve für den Fall $2\ ^3S_1 + 1\ ^1S_0 = 3\ \Sigma'$ eine gut ausgeprägte, offenbar auf Austauschkräfte beruhende Potentialmulde vorfindet. Da jedoch der Frequenzgang der Intensität von der Differenz der Kraftgesetze des oberen und unteren Zustandes abhängt und die genaue relative Lage der Potentialkurven nicht festliegt, ist uns eine Berechnung desselben noch nicht möglich gewesen. Aus dem flachen Abfall der Intensität nach langen Wellen kann man jedoch den Schluß ziehen, daß der statische Einfluß von Ionen- bzw. Elektronenfeldern bei den von uns beobachteten Linien nicht anzunehmen ist, da die Wechselwirkung eines Dipols mit einer freien Ladung einen Intensitätsabfall ergibt, der wesentlich steiler nach langen Wellen hin abnimmt als der für van der Waalsche Kräfte gültige nach Gleichung (15) (siehe S. 666).

Wir möchten nicht verfehlen, auch an dieser Stelle Herrn Dr. F. Möglich für manche anregende Diskussion zu danken.

Linien mit der Stromdichte untersucht wird. Da die Temperatur des Entladungskanals nach Gleichung (1) nur sehr langsam mit der Leistung, d. h. der Stromstärke variiert, ändert sich auch die in Gleichung (14) eingehende Dichte der Atome pro cm^3 nur wenig, so daß bei konstanter mittlerer Dichte die spezifische Eigendruckverbreiterung der 1P_1 -Term praktisch konstant ist. Der von den Elektronenstößen herrührende Anteil der Breite hingegen variiert mit der Elektronenkonzentration, die in dem vorliegenden Druck- und Stromstärkebereich etwas schwächer als proportional der Stromstärke anwächst. Untersuchungen sind im Gange, welche das Verhalten der Terme 3^1D und 3^3D bei Variation der Stromstärke klären werden.

Für den symmetrischen Teil der Verbreiterung der auf $^3P_{210}$ endenden Linien kommt der Einfluß der Stöße 2. Art und der Verstimmung durch artgleiche Atome viel weniger in Frage als für den 1P_1 -Term. Dies liegt darin begründet, daß der f -Wert der Linie 2537 \AA nur $0,025$ beträgt, so daß der sich aus der Gleichung (14) ergebende Wert um den Faktor $2,5 \cdot 10^{-2}$ kleiner ist als für die Linie $1^1S_0 - 2^1P_1$. Die langwellige, stark unsymmetrische Verbreiterung dürfte auf „statische“ Einflüsse, wie sie z. B. Kuhn (l. c.) für die langwellige Verbreiterung der Linie 2537 nachgewiesen hat, für die Abstände, in welchen im wesentlichen nur die van der Waalsschen Kräfte wirksam sind, zurückgehen. Die Theorie verlangt für diese Wechselwirkung eine Abhängigkeit der Intensität mit

$$I(r) = C \frac{1}{(r - r_0)^{3/2}} \quad (15)$$

in den äußeren Teilen der roten Seite der Linien.

Diese Abhängigkeit ist bei der Linie 3342 im roten Flügel angenähert vorhanden. Bei anderen unsymmetrischen Linien ist der Intensitätsabfall nach dem Roten sehr viel langsamer, besonders bei großen Abständen von der Linienmitte. Wie man leicht ersehen kann, bedeutet ein solcher ein stärkeres Abnehmen der Wechselwirkungskraft mit dem Abstand als bei van der Waalsschen Kräften mit: $V = \frac{C}{r^6}$.

Es liegt hierbei nahe, an ein Kraftgesetz nach der Beziehung

$$V = e^{-ar},$$

d. h. an Austauschkräfte zu denken. Eine Stütze könnte diese Annahme finden in den von Mrzowski¹⁾ für Hg_2 angegebenen Potentialkurven,

¹⁾ S. Mrzowski, ZS. f. Phys. **104**, 228, 1932.

in welchen man in der Potentialkurve für den Fall $2^3S_1 + 1^1S_0 = 3^3\Sigma$ eine gut ausgeprägte, offenbar auf Austauschkräfte beruhende Potentialmulde vorfindet. Da jedoch der Frequenzgang der Intensität von der Differenz der Kraftgesetze des oberen und unteren Zustandes abhängt und die genaue relative Lage der Potentialkurven nicht festliegt, ist uns eine Berechnung desselben noch nicht möglich gewesen. Aus dem flachen Abfall der Intensität nach langen Wellen kann man jedoch den Schluß ziehen, daß der statische Einfluß von Ionen- bzw. Elektronenfeldern bei den von uns beobachteten Linien nicht anzunehmen ist, da die Wechselwirkung eines Dipols mit einer freien Ladung einen Intensitätsabfall ergibt, der wesentlich steiler nach langen Wellen hin abnimmt als der für van der Waalsche Kräfte gültige nach Gleichung (15) (siehe S. 666).

Wir möchten nicht verfehlen, auch an dieser Stelle Herrn Dr. F. Möglich für manche anregende Diskussion zu danken.

Weitere Beobachtungen mit dem Feldelektronenmikroskop.

Von **Erwin W. Müller** in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 24. Januar 1938.)

Auf Grund verschiedener Beobachtungen mit dem Feldelektronenmikroskop wird geschlossen, daß die emittierende einkristalline Metallspitze eine vollkommen glatte, nahezu kugelige Kalotte besitzt und somit ihre Anwendung zur Abbildung gerechtfertigt ist. Durch seitliches Aufdampfen von Barium läßt sich die Spitzengestalt direkt erkennen. Die Ausbreitung des Bariums über die Wolframoberfläche ist auf dem Leuchtschirm zu verfolgen, wobei mit bis zu 10^6 -facher linearer Vergrößerung einzelne adsorbierte Ionen sichtbar werden. Die Bestimmung der wirklichen Feldstärke bei der Feldemission des reinen Wolframs ergibt den von der Theorie des Tunneleffektes geforderten Wert.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde ein einfaches Elektronenmikroskop beschrieben, bei dem die Abbildung durch die bei genügend hoher Feldstärke aus einer kalten Metallspitze austretenden Feldelektronen bewirkt wurde. Unter der Annahme einer nahezu gleichmäßig gekrümmten, etwa hyperboloidischen Gestalt der Spitze und eines zur Oberfläche senkrechten Elektronenaustritts ergab sich die Vergrößerung gleich dem Verhältnis von Leuchtschirmabstand zum Krümmungsradius der Kathodenspitze. Mit Spitzenradien von einigen 10^{-5} cm erhielt man Vergrößerungen von 100000 und mehr. Es besteht zunächst die Aufgabe nachzuweisen, daß die Spitze tatsächlich, wie vermutet, eine nahezu kugelige Kalotte besitzt.

Die Betrachtung der Spitze unter einem gewöhnlichen Mikroskop gibt über die wahre Oberflächengestalt keine Auskunft, da ja bei den feinsten zur Zeit herstellbaren Spitzen schon der Krümmungsradius unter der optischen Auflösungsgrenze liegt und die feinere Struktur in jedem Falle verborgen bleibt. Unter feinere Struktur ist hierbei eine Abweichung von der Kugelgestalt zu verstehen, die wesentlich größer ist als die natürlichen Treppenstufen von der Größenordnung der Gitterkonstanten des Spitzenmaterials. Diese Stufen beeinflussen die geometrische Abbildung durch die Feldelektronen nicht mehr wesentlich (wohl aber die Feldemission selber), da bei einer Feldstärke von 10^7 Volt \cdot cm $^{-1}$ und einer Höhe der Potentialschwelle an der Oberfläche von 3 bis 4 Volt der durch den Tunneleffekt zu überwindende Potentialberg eine Größenordnung breiter ist, als die

¹⁾ E. W. Müller, ZS. f. Phys. **106**, 541, 1937.

Gitterkonstante beträgt. Bei dieser Abschätzung der Bedeutung der Gitterstufen soll aber die Schwierigkeit nicht verschwiegen werden, die durch das Auftreten von scharf ausgeprägten, höher indizierten Richtungen in den Feldkathodenbildern, z. B. in Fig. 7 der obengenannten Arbeit, entsteht. Vielleicht kommen die Elektronen zum Teil direkt aus dem Innern der Kathode, worauf auch die beträchtliche Breite ihrer Geschwindigkeitsverteilung¹⁾ hinweist.

Das Anspitzen der Kathoden geschieht durch Ätzen in einer Schmelze von Natriumnitrit. Es widerspricht allen sonstigen Erfahrungen, daß beim Ätzen eines Metalles eine auch noch submikroskopisch glatte Oberfläche entsteht. Vielmehr werden durch den verschiedenen schnellen Abbau der einzelnen Kristallflächen die Kanten gerade besonders stark herausgearbeitet. Das Feldelektronenbild einer frisch geätzten, noch nicht geglühten Spitze besteht auch nur aus einigen scharfen, zum Teil linienhaften Emissionsstellen mit einer gewissen Symmetrie und unterscheidet sich wesentlich von den später erhaltenen flächigen Elektronenbildern. Es handelt sich hier um die Emission der Kristallkanten, die natürlich auch noch mit adsorbierten Verunreinigungen bedeckt sind. Glüht man jedoch die Spitze bei immer höheren Temperaturen, so zeigt das Elektronenbild die allmähliche Glättung und Abrundung der Spitzenoberfläche. Gleichzeitig steigt die zur Emission eines bestimmten Stromes erforderliche Spannung mit dem Verschwinden der vorspringenden, die Feldstärke erhöhenden Kanten an. Weiter ergibt auch eine infolge eines stromstarken Durchbruchs zerstörte Spitze wieder das normale Elektronenbild der glatten Wolframoberfläche, wenn sie bei genügend hoher Temperatur geglüht wurde. Endlich beobachtet man nach jedesmaligem Glühen der Kathodenspitze eine geringe Erhöhung der für einen bestimmten Strom benötigten Anodenspannung, während sich das Elektronenbild nicht mehr ändert. Dies ist nur unter der Annahme einer bei hoher Temperatur fortschreitenden Vergrößerung des Krümmungsradius zu verstehen.

Es ist also eine gewisse Beweglichkeit der Metalloberfläche anzunehmen, wofür die Verdampfung jedoch nicht verantwortlich gemacht werden kann, da sie erst bei höheren Temperaturen merklich wird. Die Beobachtung führt auf die Annahme einer Wanderung der Wolframatome oder -ionen über die Gitteroberfläche, wie ähnliches aus den Versuchen von Volmer und Estermann²⁾ über die Kondensation von Quecksilberatomen an Quecksilberkristallen und aus neueren Arbeiten über die Oberflächen-

¹⁾ E. W. Müller, ZS. f. Phys. **102**, 734, 1936. — ²⁾ M. Volmer u. E. Estermann, ebenda **7**, 13, 1921.

wanderung von adsorbiertem Ba, Th, Cs, K und Na ¹⁾ bekannt ist. Für die hier betrachteten sehr feinen Einkristallspitzen stellt nicht der scharfkantig begrenzte Kristall ein Gebilde niedrigster potentieller Energie dar, sondern ein abgerundeter Körper mit einer nahezu kugeligen Kalotte. Denn die bewegliche Oberflächenschicht verhält sich wie eine Flüssigkeitshaut, die bei den sehr kleinen Krümmungsradien infolge ihrer Oberflächenspannung einen beträchtlichen Kapillardruck ausübt. Rechnet man überschlagsmäßig mit einem Wert von $\sigma = 100 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$ (wahrscheinlich ist σ aber zehnmal größer), so ergibt sich bei einem unschwer herstellbaren Radius von $2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ ein Kapillardruck von $P = \frac{2\sigma}{r} = 10^7 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ oder rund $10 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}$, ein Wert, der fast mit der Zugfestigkeit des massiven Wolframtitters bei 3000° K vergleichbar ist.

Der Beginn der Oberflächenwanderung über das eigene Kristallgitter bei etwa 1100° K ist mit dem Feldelektronenmikroskop direkt zu beobachten, da die Glühemission sich in diesem Temperaturgebiet noch nicht störend bemerkbar macht. Bei langsamer Temperatursteigerung beginnen zunächst einige Punkte der Granulation zu flackern oder sich um einige Millimeter zu verschieben. Diese Bewegung teilt sich dann der ganzen Oberfläche mit. Bei weiterer Temperaturerhöhung erfolgt die ungerichtete Bewegung schließlich so schnell, daß die Granulation dem Auge verschwindet und eine allgemeine Unschärfe übrig bleibt. Der Übergang von der Bewegung einzelner Punkte bis zur völlig gleichmäßigen Unschärfe vollzieht sich in einem Temperaturbereich von etwa 100° . Auch bei der heftigsten Temperaturbewegung bleibt die Struktur des unterliegenden Kristalls im Emissionsbild erkennbar, wie die Fig. 2 der vorangehenden Veröffentlichung zeigt, die bei etwa 1100° K aufgenommen ist. Die Wanderung der Oberflächenatome kann allerdings nicht ganz mit der thermisch ungeordneten Bewegung der Teile einer Flüssigkeit verglichen werden. Denn unter der monoatomaren Flüssigkeitshaut liegt das feste Gitter des Metalls, in dessen periodischen Oberflächenfeldern sich die wandernden Atome oder Ionen bewegen. Diesen Feldern überlagert sich bei der direkten Beobachtung der Wanderung noch das von außen angelegte Feld von einigen $10^7 \text{ Volt} \cdot \text{cm}^{-1}$. Tatsächlich erhält man etwas verschiedene Elektronenbilder derselben Spitze, je nachdem, ob man sie mit oder ohne Feld oberhalb der Einsatztemperatur der Wanderung glüht und sie dann im eingefrorenen Zustand

¹⁾ J. A. Becker, Trans. Faraday Soc. **28**, 155, 1932; I. Langmuir, Journ. Frankl. Inst. **217**, 543, 1934; I. B. Taylor u. I. Langmuir, Phys. Rev. **44**, 423, 1936; R. C. L. Bosworth, Proc. Roy. Soc. (A) **154**, 112, 1936; **162**, 1, 1937.

beobachtet. Es kann sich bei den Bildveränderungen beim Glühen im äußeren Feld nicht um die Ausrichtung von adsorbierten Fremdatomen handeln, wie anfänglich vermutet wurde, denn die Erscheinung tritt auch unter den saubersten Vakuumverhältnissen (10^{-7} mm Hg) viel schneller ein, als eine Kondensation von Verunreinigungen möglich wäre. Die Ausbildung stärker emittierender Stellen durch die Oberflächenwanderung mit zusätzlichem äußeren Feld kann zunächst wieder entweder durch lokale Feldstärkenerhöhung infolge der Entstehung vorspringender Kanten auf der Spitzenkalotte oder durch Annahme einer besonderen Orientierung der zugewanderten Wolframatomte auf der ideal kugeligen Kalotte, die formal einer veränderten Austrittsarbeit entspricht, erklärt werden. Da sich offenbar

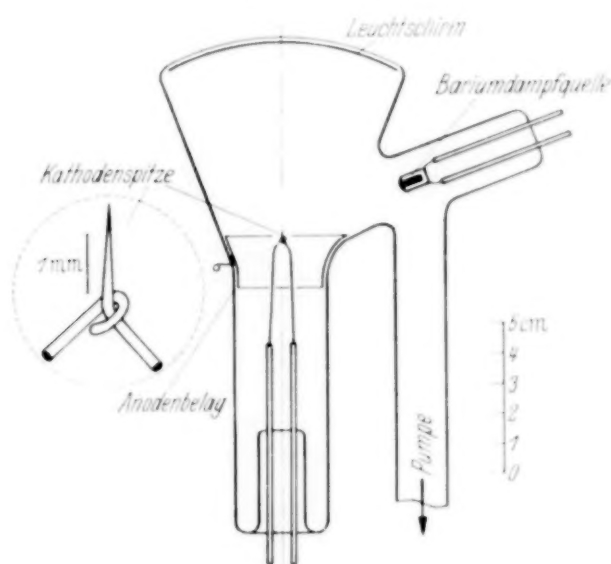


Fig. 1. Feldelektronenmikroskop mit Einrichtung zum Aufdampfen von Barium. Kathodenspitze vergrößert herausgezeichnet.

auch beim Glühen ohne äußeres Feld die dünne Schicht der wandernden Atome durch die in den einzelnen Richtungen des Spitzeneinkristalls verschiedenen Oberflächenfelder in unterschiedlicher Weise ausbilden kann, ist vorläufig noch nicht zu entscheiden, in welchem Maße die Gitterunterlage der Entstehung einer ideal kugeligen Kalotte durch die Oberflächenspannung der flüssigen Schicht entgegenwirkt. Ein direkter experimenteller Nachweis der kugeligen Gestalt der Spitzenkalotte ist also erwünscht.

Bei der Kleinheit der Spitze kommt natürlich nur eine Abbildung mit Elektronen in Betracht, und zwar mit Feldelektronen, die aus der Spitze selbst kommen, da eine Beleuchtung mit Elektronen wegen der dafür ungünstigen Feldverteilung und der Unmöglichkeit, genügend hohe Beleuchtungsstromdichten zu erhalten, nicht durchführbar erscheint. Bedampft man aber die Spitze von der Seite mit einer die Austrittsarbeit

verändernden Substanz, beispielsweise mit Barium, so erhält man Emissionsbilder, die dem seitlich von der Sonne beleuchteten Mond ähnlich sehen und die Oberflächengestalt gut erkennen lassen. Fig. 1 zeigt das Feldelektronenmikroskop mit der in einem seitlichen Ansatz angebrachten Bariumdampfquelle, einem Stück elektrisch zu heizenden Kupferbariumdrahtes. Die Kathodenspitze ist der Deutlichkeit halber noch einmal vergrößert herausgezeichnet. Sie bestand bei den vorliegenden Versuchen aus Wolfram und konnte durch Wärmeleitung von der elektrisch geglühten Drahtschleife aus bis auf etwa 2700° K erhitzt werden. Die zurückliegenden abgerundeten Kathodenteile und die Lage der Anode sind wegen der Zusammendrängung des Feldes in die unmittelbare Nähe der feinen Spitze für die Abbildung bedeutungslos. Fig. 2a zeigt eine mit einer dünnen



Fig. 2a. Geringe Menge Barium von links aufgedampft.

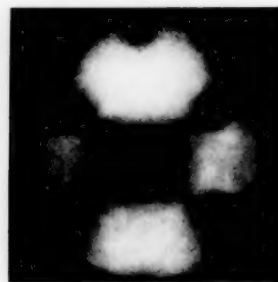


Fig. 2b. Reine Wolframoberfläche.

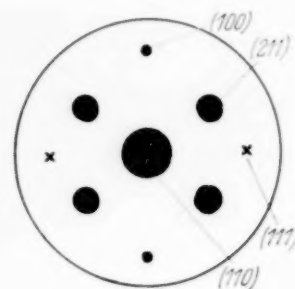


Fig. 2c. Indizierung der Emissionsrichtungen in Fig. 2b.

Bariumschicht bedampfte Spitze von weniger als monoatomarer Bedeckung. Deutlich macht sich noch die Struktur des unterliegenden Wolframeinkristalles bemerkbar, dessen reine Oberfläche in Fig. 2b wiedergegeben ist, während Fig. 2c zur Orientierung die Indizierung der wichtigsten ausgezeichneten Emissionsrichtungen des Wolframkristalles schematisch angibt. Das mondähnliche Aussehen der mit Barium „beleuchteten“ Spitze ist ein direkter Beweis für die kugelige Form der Spitzkalotte. Weitere hier nicht wiedergegebene Aufnahmen mit verschieden schräger Bariumbedampfung zeigen dieselbe glatte „Lichtgrenze“. Dampft man eine größere Menge Barium auf die Spitzenkalotte, so daß auf dem der Bariumquelle zugekehrten Teil der Spitze die Bedeckung mehrere Atomlagen dick wird, so ist die Austrittsarbeit dieser Gebiete wieder höher als die der Übergangszone, in der eine für die Emission optimale Bedeckung vorhanden ist. Man erhält mit größerer Schichtdicke Bilder wie Fig. 3a und 3b, bei denen das Gebiet der maximalen Emissionsstromdichte mit zunehmender Dicke der Bariumschicht immer schmaler wird.



Fig. 3a. Mehrere Atomlagen dicke Bariumschicht von links aufgedampft. 850 Volt, $4,0 \mu\text{A}$.



Fig. 3b. Bariumschicht noch dicker als in Fig. 3a. 860 Volt, $4,0 \mu\text{A}$.

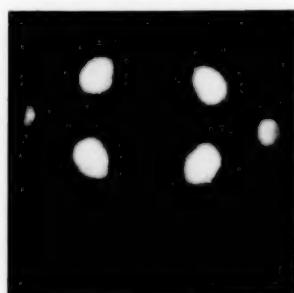


Fig. 3c. Bariumbedeckte Spitze 1 min bei 870°K gegläht und bei dieser Temperatur aufgenommen. 920 Volt, $2,6 \mu\text{A}$. Starke Emission der (211)-Fläche.

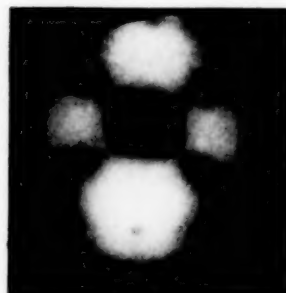


Fig. 3d. Reine Wolframoberfläche. 2500 Volt, $2,2 \mu\text{A}$.

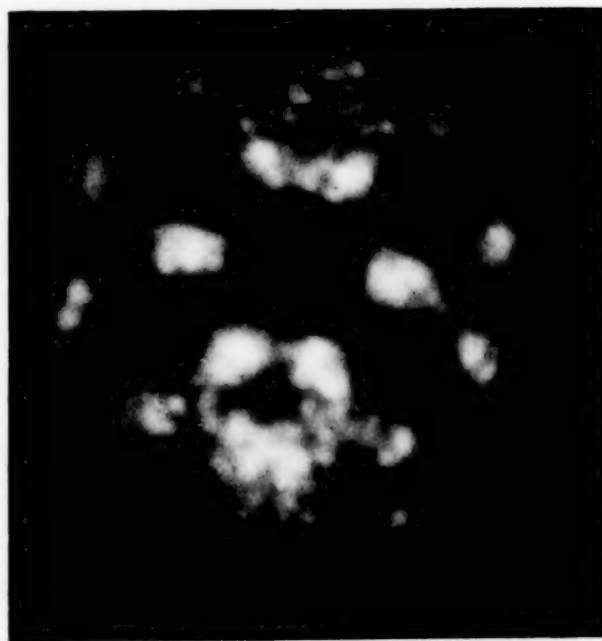


Fig. 3e. Barium bei 1300°K 1 min lang abgedampft. Sehr geringe Bedeckung, effektive Austrittsarbeit $4,0 \text{ e-Volt}$, 1960 Volt, $2,5 \mu\text{A}$. Der Film ist in einzelne Ionen aufgelöst.

Bei den Elektronenbildern fällt das Fehlen der Emission auf den (110)- und den (211)-Flächen auf, wodurch auch das Bild des reinen Wolframs sein charakteristisches Gepräge erhält. Selbst wenn die Oberfläche mit Barium bedampft ist, bleiben diese Stellen dunkel. Man könnte vermuten, daß es sich um mehr oder weniger flache Aushöhlungen auf der Spitzenkalotte handelt, in denen dann die Feldstärke zu klein wird, um noch eine merkliche Emission zu ermöglichen. Fig. 4a, bei der das große „(110)-Loch“ der Fig. 4b fast genau von der Seite mit einer größeren Bariummenge



Fig. 4a. Größere Bariummenge von links aufgedampft.



Fig. 4b. Reine Wolframoberfläche.

bedampft wurde, zeigt, wie der Übergangsstreifen mit der optimalen Bedeckung sich um den rechten Rand des Loches herumlegt. Wenn es sich aber um eine wirkliche Aushöhlung handelte, müßte auch der linke Rand irgendwie eine geringere und damit stärker emittierende Bedeckung zeigen. Dies ist aber nicht der Fall. Auch die Annahme einer bloßen Abflachung der sonst kugeligen Kalotte würde das Fehlen der Emission an diesen Stellen nicht erklären, da die Feldstärke nach Modellversuchen im elektrolitischen Trog dabei nur um 5 bis 10% geringer wird, was einer Abnahme der Emissionsstromdichte um den Faktor 5 bis 10 entsprechen würde. Die Emission in den „Löchern“ ist aber mindestens zwei Zehnerpotenzen kleiner als auf den anderen Flächen.

In Fig. 4a sehen wir neben dem hellsten, vermutlich einatomaren Grenzstreifen ein verhältnismäßig deutlich ausgeprägtes Gebiet mit etwas geringerer Emission, das wahrscheinlich eine doppelte Lage von Bariumatomen enthält. Weiter nach links ist die Schichtdicke noch größer und die Austrittsarbeit noch höher. Das Auftreten der scharfen, übergangslosen Trennung der beiden verschiedenen emittierenden Schichtdicken führt zu dem Schluß, daß das Barium bei der Kondensation noch beweglich genug ist, um sich auf der schon mit ein wenig Barium bedeckten Unterlage, die sich auf Zimmertemperatur befindet, einen bestimmten Platz auszusuchen, wobei gerade auf der (110)-Fläche eine besonders große Beweglichkeit

vorhanden ist. Bei der großen Besetzungsdichte findet hier auch schon von der (110)-Fläche eine Emission statt, während sie bei dünneren Bariumschichten offenbar von dem unterliegenden Kristall aus verboten ist. Die ebenfalls nicht emittierenden (211)-Flächen können bei gewissen Bedeckungsverhältnissen gerade besonders aktiv werden, wie Fig. 3c zeigt. Für eine große Beweglichkeit aufgedampfter Atome vor allem auf der (110)-Fläche spricht noch folgender Versuch: Dampft man auf eine reine Wolframspitze von der Seite Wolfram auf, so wandern die kondensierenden Atome auf der kalten Unterlage noch bis zur (110)-Fläche, um sich dort in Form von kleinen Kristalliten mit stark emittierenden Kanten festzusetzen (Fig. 5), die sich erst beim Erhitzen auf 1100°K in die Unterlage einbauen und das normale Wolframbild wieder erscheinen lassen. Diese Beobachtungen und eine Reihe weiterer Versuche, bei denen die Spitze seitlich unter verschiedenen Winkeln mit Barium bedampft wurde, verlangen nicht die Annahme einer Aushöhlung der Kalotte an den schwach emittierenden Stellen. Man darf vielmehr eine ziemlich vollkommene Rundung annehmen und wird dann die Emissionsunterschiede in den verschiedenen Kristallrichtungen wenigstens formal einer richtungsabhängigen Austrittsarbeit zuschreiben können.



Fig. 5. Auf eine kalte Wolframspitze seitlich aufgedampftes Wolfram.

Anschließend seien noch einige Beobachtungen über die Oberflächenwanderung von Barium auf Wolfram mitgeteilt, wenngleich zunächst an eine quantitative Auswertung noch nicht gedacht werden konnte. Gegenüber der bisher bei der Untersuchung der Oberflächenemission adsorbierter Atome fast ausschließlich benutzten Glühemission weist die Beobachtung der Feldemission insbesondere mit dem Feldelektronenmikroskop verschiedene Vorteile auf. Man kann nicht nur die bei einer höheren Temperatur erreichte Verteilung zur Messung einfrieren lassen, was auch bei Kontaktpotentialuntersuchungen möglich ist, sondern außerdem die Schicht in einem weiten Temperaturbereich auf dem Leuchtschirm beobachten. Damit erhält man statt der sonst allein zugänglichen mittleren Besetzungsdichte die entsprechenden Werte für die verschiedenen Orientierungen des unterliegenden Kristalls, die von dem effektiven Bedeckungsgrad erheblich abweichen können. In der folgenden Untersuchung sind die angegebenen Temperaturen bis 950°K herab mit einem Mikropyrometer bestimmt und darunter durch Extrapolation mit Hilfe des Heizstromes gewonnen. Dadurch sind die Absolutwerte der Temperaturen in der Nähe von 700°K um etwa $\pm 30^{\circ}$

unsicher, während Temperaturdifferenzen in diesem Gebiet um höchstens $\pm 5^{\circ}$ unbestimmt angegeben werden können. Bei einerseitlich aufgedampften dicken Bariumschicht (Fig. 6a) beginnt die Ausbreitung bei etwa 690° K. Nach einer 10 sec dauernden Erhitzung auf 715° K wird der Zustand 6b erreicht, nach weiteren 10 sec erhält man Fig. 6c. Der adsorbierte Film



Fig. 6a. Barium in größerer Menge von links unten aufgedampft. 1250 Volt, 3 μ A.



Fig. 6b. Spitze 10 sec auf 715° K erhitzt. 1250 Volt, 3 μ A.



Fig. 6c. Weitere 10 sec auf 715° K erhitzt. 1250 Volt, 3 μ A. Links unten Emission einzelner Bariumkristallite.



Fig. 6d. 10 sec auf 1500° K erhitzt. Sehr geringer Bedeckungsgrad. 3500 Volt, 3 μ A. (Reines Wolfram. 3600 Volt, 3 μ A.)

breitet sich mit einer scharfen Grenze über die anfänglich unbedeckte Wolframoberfläche aus, und zwar steigt die lineare Fortschritts- geschwindigkeit der Grenze des Bariumfilms bei einer Temperaturerhöhung um 25° auf das Zehnfache, was einer sehr hohen Wärmetönung der Oberflächenwanderung entspricht. Während der Ausbreitung sammelt sich die größere Bariummenge auf der linken, der Dampfquelle zugekehrten Seite zu einzelnen Kristalliten, die infolge der erhöhten Feldstärke an ihren Kanten stärker emittieren. Bei weiterer Temperatursteigerung verdampfen diese Kristallite wieder. Nach der Ausbreitung über die ganze Oberfläche bildet der Film eine sehr gleichmäßige Schicht, wobei das charakteristische Emissionsbild der Unterlage sichtbar bleibt. Dampft man das Barium bei höheren Temperaturen weitgehend ab, so werden noch verschiedene hier

nicht näher zu betrachtende Adsorptionszustände durchlaufen und man erhält endlich eine so dünne Bedeckung, daß sich der Film in einzelne Punkte auflöst, die entsprechend der Zeichenschärfe des Elektronenmikroskops auf dem Leuchtschirm etwa 1 mm Durchmesser besitzen. Fig. 3e zeigt eine durch minutenlanges Abdampfen bei 1300° K erhaltene sehr dünne Schicht. Die besonders feine Wolframspitze besitzt einen Krümmungsradius von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ cm, wie sich aus der benötigten Anodenspannung von 2500 Volt für die reine Wolframoberfläche und einen Vergleich mit der für denselben Strom gebrauchten Spannung bei Spitzen mit lichtmikroskopisch noch meßbarem Radius ergibt¹⁾. Die lineare Vergrößerung beträgt im vorliegenden Falle $5 \cdot 10^5$ und die Auflösung bei 1 mm Bildunschärfe etwa $2 \cdot 10^{-7}$ cm. Aus dem Anstieg der Feldstromkennlinien in der Darstellung $\lg I$ gegen $1/F$ ergibt sich nach der q^3 -Beziehung²⁾ für die betrachtete bariumbedeckte Spitze eine effektive Austrittsarbeit von 1,0 e-Volt. Die zur Erniedrigung der Austrittsarbeit des reinen Wolframs um $\Delta\varphi = 0,5$ e-Volt erforderliche Flächendichte der adsorbierten Bariumionen ist leicht anzugeben, da sich nach den Erfahrungen bei der Glühemission der Potentialsprung in einer adsorbierten Schicht bei kleinen Bedeckungsgraden genau aus dem Dipolmoment der Ionen und ihrer Flächendichte berechnen läßt. Nach De Boer³⁾ beträgt das Dipolmoment des einzeln adsorbierten Ba^{++} -Ions $\mu = 11,6 \cdot 10^{-18}$ ESE., womit sich in unserem Falle eine Flächendichte von

$$\sigma = \frac{\Delta\varphi}{300 \cdot 4\pi\mu} = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ Ionen} \cdot \text{cm}^{-2}$$

ergibt. Da die dichtest besetzten Stellen für die effektive Austrittsarbeit fast allein maßgeblich sind, vergleichen wir die Flächendichte der Emissionspunkte in den sechs hellsten Gebieten rund um das (110)-Loch unserer Fig. 3e mit dem berechneten Bedeckungsgrad. Jeder der sechs Flecke besitzt auf dem Leuchtschirm eine Ausdehnung von etwa $0,5 \text{ cm}^2$ und enthält 20 bis 30 Emissionspunkte, die deutlich getrennt sichtbar werden. Auf der verkleinerten Aufnahme ist infolge der Überstrahlung die Auflösung leider nicht so vollkommen. Bei einer Flächenvergrößerung von $25 \cdot 10^{10}$ beobachten wir also eine Flächendichte von 1 bis $1,5 \cdot 10^{13}$ Ionen $\cdot \text{cm}^{-2}$ in bester

¹⁾ Es ist darauf zu achten, daß der Leuchtschirm Anodenpotential erhält, da sonst infolge von Aufladungen durch die Sekundäremission das Leuchtschirmpotential durch die Anodenöffnung hindurchgreift und die wirkliche Feldstärke an der Spitze nicht meßbar ist. — ²⁾ E. W. Müller, ZS. f. Phys. 102, 734, 1936. — ³⁾ J. H. de Boer, Elektronenemission und Adsorptionserscheinungen, S. 73, Leipzig 1937.

Übereinstimmung mit der aus der Austrittsarbeit berechneten Größe. Das Feldelektronenmikroskop gestattet also wirklich die Sichtbarmachung einzelner adsorbierter Ionen. Die Emission der Punkte ist nicht gleich groß. Vielleicht sind die stärker emittierenden Stellen adsorbierte Ionen und die schwächeren Atome. Es müßte auch versucht werden, die Intensität der einzelnen Emissionsstellen mit Hilfe von über den Leuchtschirm beweglichen Auffängern oder ähnlichen Einrichtungen zu messen, um festzustellen, ob die Gesamtemission einer größeren Fläche etwa proportional der Zahl der adsorbierten Ionen ist, wie es nach der visuellen Beobachtung fast den Anschein hat. Das zu wissen wäre für das Verständnis des Mechanismus der Feldemission von adsorbierten Schichten wichtig.

Weitere Beobachtungen erstreckten sich auf die Oberflächendiffusion der einzeln sichtbaren Adionen. Erhitzt man eine mit sehr wenig Barium bedeckte Wolframspitze, etwa die in Fig. 3 e wiedergegebene, so tritt bis 830°K keine Veränderung des Bildes ein. Aber schon bei 840°K sind die in den sechs dicht besetzten Flecken rund um das (110)-Loch adsorbierten Ionen in heftigster Bewegung, die schließlich bei 880°K so schnell wird, daß die einzelnen Emissionspunkte in diffusen Flecken verschwinden. Währenddessen liegen aber die Bariumionen in den schwachbesetzten Gebieten etwa in der Umgebung von (100) in ihrer ursprünglichen Schärfe vollkommen unbeweglich auf ihrem Platz, um erst bei 930°K unruhig zu werden und schließlich bei weiterer Temperatursteigerung an der allgemeinen Bewegung teilzunehmen. Überraschend ist die Kleinheit des Temperaturintervalls, in dem sich innerhalb eines Gebietes gleichmäßiger Besetzungsdichte der Übergang von vollkommener Ruhe zur heftigen Bewegung abspielt, so daß man fast den Eindruck des Schmelzens der festgefrorenen Bariumionen hat. Das Beweglichwerden findet allerdings nicht bei einer ganz bestimmten Temperatur statt, sondern in einem Bereich von etwa 10° . Bei vollkommen gleichmäßiger Besetzung mit Adionen könnte man sich ein Schmelzen des Oberflächengitters bei einer scharf definierten Temperatur in Analogie zum Schmelzen eines räumlichen Gitters ganz gut vorstellen. In unserem Falle hängt also die absolute Höhe des „Schmelzpunktes“ von der Besetzungsdichte ab, und zwar betragen diese Temperaturen bei der der optimalen Emission entsprechenden Besetzungsdichte etwa 680°K , bei der allergeringsten Dichte etwa 950°K . Glücklicherweise tritt bei diesen Temperaturen von den zurückliegenden, etwas heißeren Kathodenteilen noch keine die Abbildung störende Glühemission ein.

Zur quantitativen Beschreibung der beobachteten Ausbreitungsvorgänge wäre die genaue Kenntnis des Vergrößerungsmaßstabes sehr

erwünscht. Es fehlt bis jetzt an einer Methode zur direkten Bestimmung dieser Größe oder wenigstens des Krümmungsradius. Eine Messung oder besser Schätzung des Krümmungsradius unter einem Mikroskop mit Öl-immersion ergab bei einer Wolframspitze, die bei 8000 Volt 10^{-6} Amp emittierte, einen Radius von $0,6 \mu$. Idealisiert man die Form der Spitze zu einem Hyperboloid, was nach der mikroskopisch sichtbaren Gestalt zulässig ist, so läßt sich die Feldstärke an ihrem Scheitel exakt berechnen. Nach einer Formel von Eyring, Makeown und Millikan¹⁾ ergibt sich für die betrachtete Spitze eine Feldstärke von $3,5 \cdot 10^7$ Volt \cdot cm⁻¹ bei einem Feldstrom von 1 μ A bzw. einer mittleren Stromdichte von etwa 200 Amp \cdot cm⁻². Der berechnete Wert der Feldstärke wurde noch durch Messung der Potentialverteilung an einem der Spitze ähnlichen vergrößerten Modell im elektrolytischen Trog nachgeprüft. Damit ist zum erstenmal wirklich die Feldstärke experimentell bestätigt, die die wellenmechanische Behandlung des Emissionsvorganges als Tunneleffekt angibt²⁾. Bisher wurde die Feldstärke immer um eine Zehnerpotenz zu niedrig gefunden, weil vorspringende Kanten und andere Unregelmäßigkeiten die aus der Geometrie der Anordnung berechnete Grobfeldstärke in unkontrollierbarer Weise vergrößerten. Noch besteht aber die Schwierigkeit, daß die experimentell gefundene Abhängigkeit der Feldemission von einer höheren, etwa der dritten Potenz der Austrittsarbeit von der Theorie nicht geliefert wird. Da die Feldstärke fast von der gleichen Größenordnung ist wie die die Adsorption bewirkenden Atomfelder, könnte bei durch Adsorption erniedrigter Austrittsarbeit der Emissionsmechanismus wesentlich verändert werden, so daß die glühelektrische Austrittsarbeit in anderer Weise eingeht als die Theorie voraussetzt. Vielleicht läßt sich die Frage experimentell klären, indem man an einer Spitze die Emissionsänderung beim Aufdampfen einer direkt abzählbaren Zahl von Bariumionen mißt und aus der Flächendichte die Austrittsarbeit berechnet. Dazu ist natürlich die größtmögliche Auflösung des Feldelektronenmikroskops erforderlich.

Die weitere Verringerung des Spitzenradius scheint die Auflösung noch steigern zu können, da nach den bisherigen Beobachtungen die Abbildungsschärfe konstant bleibt. Durch Ätzen war es jedoch nicht möglich, kleinere Radien als $2 \cdot 10^{-5}$ cm zu erhalten, womit bei einer Wolframspitze für 1 μ A Emission etwa 2500 Volt Anodenspannung erforderlich waren. Man kann aber den Spitzenradius fast beliebig verkleinern, wenn man im fertigen Entladungsrohr von der durch Hochglühen geglätteten Spitze eine gleich-

¹⁾ C. F. Eyring, S. S. Makeown, R. A. Millikan, Phys. Rev. **31**, 900, 1928. — ²⁾ L. Nordheim, Phys. ZS. **30**, 177, 1929.

mäßig dicke Schicht abträgt. Zu diesem Zweck wird die Oberfläche der Spitze durch Glühen in Sauerstoff von einigen Zehntel mm Hg oxydiert, und zwar so dick, daß sich Anlauffarben zeigen. Nachdem wieder Hochvakuum hergestellt ist, kann die Oxydschicht verdampft werden, und eine sehr scharfe Spitze bleibt zurück, die schon bei einer Anodenspannung von weniger als 100 Volt zur Beobachtung ausreichende Feldemission ergibt. Allerdings ist diese Spitze zunächst noch mit einer adsorbierten Sauerstoffschicht bedeckt, die erst durch Glühen bei 2200°K restlos zu entfernen ist. Bei dieser Temperatur nimmt aber der Krümmungsradius infolge der Oberflächenspannung der beweglichen Schicht schon sehr schnell zu. Auch ist die Helligkeit des Leuchtschirmbildes bei den geringen Anodenspannungen nicht sehr groß, und den Feldstrom wesentlich zu vergrößern ist unzumutbar, da die Kontraste wegen der Konvergenz der Stromfeldstärkekeimlinien für verschiedene Austrittsarbeiten im $\lg I - 1/F$ -Diagramm mit zunehmendem Strom geringer werden. Praktisch lassen sich mit durch Oxydieren geschärften Spitzen bei etwa 1000 Volt Anodenspannung brauchbare Bilder erzeugen. Der Krümmungsradius der Spitze beträgt dabei etwa $0,8 \cdot 10^{-5}\text{ cm}$ und die lineare Vergrößerung entsprechend 10^6 bei einer Bildschärfe von 1 mm bzw. einem Auflösungsvermögen von 10 Å .

Berlin, Laboratorium der Stabilovolt G. m. b. H., Januar 1938.